

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

А.І. Жученко, М.З. Кваско, Н.А. Кубрак

ІДЕНТИФІКАЦІЯ  
ДИНАМІЧНИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК

КОМП’ЮТЕРНІ МЕТОДИ

КИЇВ

2000

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

А.І. Жученко  
М.З. Кваско  
Н.А. Кубрак

---

ІДЕНТИФІКАЦІЯ  
ДИНАМІЧНИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК

---

КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ

КИЇВ

2000

УДК 681.5:681.3.06

ЖУЧЕНКО А.І., КВАСКО М.З., КУБРАК Н.А. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК. КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ. К.:ВІПОЛ, 2000. – 182с., іл.

Аналізується вплив похибок у визначенні структури апроксимуючої передаточної функції на результати ідентифікації об'єктів автоматичного керування. Наводяться алгоритми та їх програмна реалізація на Турбо Паскалі для обчислення параметрів апроксимуючих структур за перехідними та частотними характеристиками об'єкта. Пропонується ряд нетрадиційних комп'ютерних методів ідентифікації: визначення передаточних функцій та розрахунок частотних характеристик за системою  $n$  звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, обчислення частотних характеристик консервативних систем, формування наближених передаточних функції для ряду об'єктів з розподіленими параметрами.

Для наукових працівників і спеціалістів, які займаються розробкою та впровадженням систем автоматизації виробничих процесів.

Відповідальний редактор	М.З. Кваско, канд. техн. наук, проф.
Рецензенти	А.З. Грищенко, д-р техн. наук, проф. А.П. Ладанюк, д-р техн. наук, проф.
Редактор	М.П. Прокопенко
Комп'ютерна верстка	І.М. Голінко, канд. техн. наук

ISBN 966-622-029-6

© А.І. Жученко  
М.З. Кваско  
Н.А. Кубрак

## ВСТУП

При дослідженні динамічних систем вирішальне значення має вибір структури та визначення параметрів моделі об'єкта дослідження. Якщо не буде гарантовано адекватність моделі об'єкту моделювання, то подальше використання даної моделі втрачає будь-який сенс. Справа ускладнюється тим, що ступінь адекватності моделі залежить від багатьох чинників, наприклад, від діапазону частот, в якому буде працювати система з даним об'єктом. Цей же діапазон, в свою чергу, буде визначатися "оточенням" даного елемента, законами регулювання, параметрами настроєння регулятора.

На необхідність розглядати моделювання кожного елемента системи і системи в цілому як системну задачу звернув увагу ще В.Я. Ротач [38] та інші автори [15,20].

У цій роботі аналізується вплив вищезгаданих, а також ряду інших чинників на вибір структури моделі елемента динамічної системи, розглядаються методи визначення параметрів обраної структури.

Увага читача привертається до однієї рідко згадуваної особливості деяких динамічних моделей, пов'язаної з обмеженою точністю визначення коренів характеристичних поліномів за умови, що ці корені утворюють компакту групу. У подібній ситуації невеликі похибки у визначенні коренів призводять до великих похибок у визначенні коефіцієнтів у формулах перехідних процесів, що може суттєво спотворити результати дослідження. Перелічені вище проблеми розглядаються у першому розділі книги.

У другому розділі аналізуються методи визначення параметрів вибраної апроксимуючої структури за реакцією системи на відомий вхідний сигнал. Розгляд починається з об'єктів, які в першому наближенні можуть бути зведені до елементарних динамічних ланок. Завершується розділ ідентифікацією об'єктів з чітко визначеною розподіленістю параметрів, які апроксимуються дробово-раціональними передаточними функціями довільного порядку.

Третій розділ присвячено алгоритмам параметричної ідентифікації з використанням частотних характеристик. Ці частотні характеристики можуть розраховуватися як за дробово-раціональними передаточними функціями (коли мова

йде про зниження їх порядку), так і за системою  $n$  звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Частотні характеристики можуть також бути результатом фізичного або математичного експерименту, наприклад, шляхом чисельного розрахунку реакції об'єкта з розподіленими параметрами на гармонічний вхідний сигнал. Нарешті, розглядається алгоритм розрахунку частотних характеристик за імпульсною характеристикою відповідного динамічного каналу. Наводиться опис методу визначення частотних характеристик коливальних об'єктів. За наявності ряду точок амплітудно-фазової характеристики коефіцієнти дробово-раціональної передаточної функції знаходяться шляхом розв'язання відповідної системи алгебраїчних рівнянь.

У четвертому розділі увазі читача пропонується ряд нетрадиційних методів апроксимації. Так, наприклад, коефіцієнти передаточної функції визначаються безпосередньо із системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Для апроксимації дробово-раціональними передаточними параметрами пропонується комп'ютерний алгоритм, що базується на використанні так званої дискретно-неперервної моделі. Наводиться також ряд інших методів.

Усі чисельні алгоритми, розглянуті в книзі, супроводжуються підпрограмами на Турбо Паскалі, що їх реалізують. В кінці видання наводиться лістинг модулів Ni5, Servis, SunVar, Polynom та GromU, що підтримують програми та процедури, розглянуті в книзі. Програма DeadTime демонструє варіанти апроксимації ланки транспортного запізнювання різними методами, варіюючи порядок у межах кожного з методів. У програмі можна враховувати вплив "оточення" на точність апроксимації.

## 1. ВИБІР СТРУКТУРИ МОДЕЛІ ОБ'ЄКТА

### 1.1. Залежність структури апроксимуючої передаточної функції об'єкта від частоти

Останнім часом великого поширення при розрахунку автоматичних систем набули частотні методи [2, 23, 31, 38]. При користуванні такими методами суттєво забезпечити адекватність моделі об'єкту саме в заданому діапазоні частот, тобто в околі певної (базової) частоти (до речі, вибір базової частоти залежить як від розв'язуваної задачі, так і від ряду інших чинників - закону регулювання, настроєння регулятора, методу і цілей дослідження та ін.).

Проілюструємо вибір структури апроксимуючої передаточної функції на прикладі врахування теплоакumuляції в стінках, обмежуючих досліджуваний тепловий об'єкт, наприклад, топку, чи в більш загальній постановці, проточну ємність з товстими теплоакumuлюючими стінками [1, 15, 17, 24].

Для простоти вважатимемо, що стінка розглядається як плоска (нехтуємо можливою кривизною), тобто описується диференціальним рівнянням [32]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

де  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$  - коефіцієнт температуропровідності;  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності;  $\rho$  -

щільність матеріалу стінки;  $c$  - коефіцієнт теплоємності.

За граничні умови візьмемо

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_0 (\theta^{S,L} - \theta|_{x=0}), \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

тобто граничну умову III роду на "лівій" поверхні (при  $x=0$ , відраховується від внутрішньої поверхні, яка омивається теплоносієм у досліджуваній проточній ємності з температурою  $\theta^{S,L}$ , коефіцієнт теплообміну між теплоносієм та поверхнею -  $\alpha_0$ ). На правій поверхні (при  $x=\delta$ , де  $\delta$  - товщина стінки) приймаємо умову ідеальної теплоізоляції, тобто граничну умову II роду при нульовому тепловому потоці. Будемо

шукати передаточну функцію стінки для каналу  $\theta^{L,S} \rightarrow \theta|_{x=0}$ . Для цього будемо вважати, що температури в рівняннях (1.1), (1.2) записані в приростах відносно базового усталеного режиму, в околі якого ми збираємося досліджувати динамічні властивості об'єкта і стінки, зокрема.

При такій постановці задачі природними будуть нульові початкові умови і перетворення за Лапласом рівнянь (1.1), (1.2) дасть:

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2} - \frac{p}{a}\bar{\theta} = 0; \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \frac{d\bar{\theta}}{dx} \Big|_{x=0} + \bar{\theta} \Big|_{x=0} = \bar{\theta}^{S,L}, \\ \frac{d\bar{\theta}}{dx} \Big|_{x=\delta} = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

де,  $\bar{\theta} = \int_0^{\infty} \theta e^{-pt} dt$  - зображення за Лапласом від  $\theta$ ;  $\bar{\theta}^{S,L} = \int_0^{\infty} \theta^{S,L} e^{-pt} dt$  - те ж для  $\theta^{S,L}$ ;

$p$  - комплексна змінна.

Рівняння (1.3) є звичайним диференціальним рівнянням відносно  $\bar{\theta}$ . Відповідне йому характеристичне рівняння:

$$r^2 - \frac{p}{a} = 0, \quad (1.5)$$

коренями якого є

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{p}{a}}. \quad (1.6)$$

Отже розв'язок (1.3) матиме вигляд:

$$\bar{\theta} = C_1 e^{x\sqrt{\frac{p}{a}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}, \quad (1.7)$$

де  $C_1$  та  $C_2$  – сталі інтегрування.

Для визначення  $C_1$  та  $C_2$  скористаємося системою рівнянь (1.4):

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} (C_1 - C_2) + C_1 + C_2 = \bar{\theta}^{S,L}, \\ \sqrt{\frac{p}{a}} (C_1 e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} - C_2 e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}) = 0, \end{cases}$$

або після зведення подібних та спрощення:

$$\begin{cases} C_1 \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + C_2 \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) = \bar{\theta}^{S,L}, \\ C_1 e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} - C_2 e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Розв'язуючи цю систему за правилом Крамера, матимемо:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{\theta}^{S,L}; & 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \\ 0; & -e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}}; & 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \\ e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}}; & -e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}} = \frac{\bar{\theta}^{S,L} e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}}}{e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right)};$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}}; & \bar{\theta}^{S,L} \\ e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}}; & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}}; & 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \\ e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}}; & -e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}} = \frac{\bar{\theta}^{S,L} e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}}}{e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}.$$

Підставляємо одержані значення  $C_1$  та  $C_2$  в (1.7):

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}^{S,L} \frac{e^{-(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{(\delta-x)\sqrt{\frac{p}{a}}}}{e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \left( 1 - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}.$$

Ділячи ліву та праву частину одержаного виразу на  $\bar{\theta}^{S,L}$ , дістанемо при  $x = 0$ :

$$W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(p) = \frac{e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}}}{e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \left( e^{\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} - e^{-\delta \sqrt{\frac{p}{a}}} \right)}.$$

Ділимо чисельник і знаменник правої частини на  $e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}} + e^{-\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}$ , і тоді функція  $W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(p)$  набуває вигляду:

$$W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(p) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{th}\left(\delta \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}, \quad (1.9)$$

де  $\operatorname{th}\left(\delta \sqrt{\frac{p}{a}}\right)$  - тангенс гіперболічний від  $\delta \sqrt{\frac{p}{a}}$ .

Якщо “праву” поверхню стінки віднести на нескінченність ( $\delta \rightarrow \infty$ , дуже товста стінка), то з граничної умови на цій поверхні впливатиме, що  $C_1 = 0$  (інакше друге рівняння системи (1.8) не виконується), і тоді гранична умова на лівій поверхні (перше рівняння системи (1.8)) набуває вигляду:

$$C_2 \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}}\right) = \bar{\theta}^{S,L}, \quad \text{звідки:} \quad C_2 = \frac{\bar{\theta}^{S,L}}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}}}.$$

Формула (1.7) перетворюється на:

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}^{S,L} \frac{e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}}},$$

а відповідна передаточна функція стає такою:

$$W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(p) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}}}. \quad (1.10)$$

Наведені обчислення мають на меті показати, по-перше, що аналітичне визначення передаточних функцій для об'єктів з розподіленими параметрами є відносно непростю справою (а розглянутий приклад є практично одним з найпростіших можливих) і, по-друге, одержані формули для передаточних функцій виявляються набагато складнішими (за змістом, якщо не за формою), ніж найбільш часто вживані дробово-раціональні передаточні функції, якими описуються об'єкти із зосередженими параметрами. До речі, дві щойно згадані особливості передаточних функцій об'єктів з розподіленими параметрами пояснюють прагнення дослідників

звести, замінити ці “екзотичні” передаточні функції більш простими, зручними, зрозумілими (“рідними”) дробово-раціональними. Коли і наскільки це допустимо, подивимось далі.

Почнемо з аналізу передаточної функції (1.9). Вводячи в ній заміну  $p=j\omega$ , перетворимо її на амплітудно-фазову характеристику:

$$W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{j\omega}{a}} \operatorname{th}\left(\delta \sqrt{\frac{j\omega}{a}}\right)}. \quad (1.11)$$

Очевидно, що  $\sqrt{j} = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}$ . Обмежимося додатним значенням, тобто:  $\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$ .

$$\text{Тоді} \quad \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{j\omega}{a}} = b\Omega(1+j), \quad (1.12)$$

$$\text{де} \quad b = \frac{\alpha_0}{\lambda \delta}; \quad \Omega = \delta \sqrt{\frac{\omega}{2a}}.$$

Що ж стосується  $\operatorname{th}\left(\delta \sqrt{\frac{j\omega}{a}}\right)$ , то подамо його так:

$$\begin{aligned} \operatorname{th}\left(\delta \sqrt{\frac{j\omega}{a}}\right) &= \operatorname{th}[\Omega(1+j)] = \frac{e^{\Omega(1+j)} - e^{-\Omega(1+j)}}{e^{\Omega(1+j)} + e^{-\Omega(1+j)}} = \\ &= \frac{e^{\Omega}(\cos \Omega + j \sin \Omega) - e^{-\Omega}(\cos \Omega - j \sin \Omega)}{e^{\Omega}(\cos \Omega + j \sin \Omega) + e^{-\Omega}(\cos \Omega - j \sin \Omega)} = \\ &= \frac{\cos \Omega (e^{\Omega} - e^{-\Omega}) + j \sin \Omega (e^{\Omega} + e^{-\Omega})}{\cos \Omega (e^{\Omega} + e^{-\Omega}) + j \sin \Omega (e^{\Omega} - e^{-\Omega})}. \end{aligned}$$

Можна було б у цій формулі замінити вирази в дужках на  $\operatorname{sh}(\Omega)$  та  $\operatorname{ch}(\Omega)$ , (поділивши їх перед цим на 2) але при програмуванні на Турбо Паскалі це недоцільно, оскільки стандартних підпрограм для обчислення гіперболічних функцій в Турбо Паскалі не передбачено. Тому позначимо:  $E = e^{\Omega} - e^{-\Omega}$ ,  $F = e^{\Omega} + e^{-\Omega}$ .

$$\text{Тоді} \quad \operatorname{th}\left(\delta \sqrt{\frac{j\omega}{a}}\right) = \frac{E \cos \Omega + jF \sin \Omega}{F \cos \Omega + jE \sin \Omega} = \frac{(E \cos \Omega + jF \sin \Omega)(F \cos \Omega - jE \sin \Omega)}{(F \cos \Omega)^2 + (E \sin \Omega)^2},$$

$$\text{або} \quad \operatorname{th}\left(\delta \sqrt{\frac{j\omega}{a}}\right) = R_1 + jI_1, \quad (1.13)$$

$$\text{де } R_1 = \frac{EF \cos^2 \Omega + EF \sin^2 \Omega}{Z_n} = \frac{EF}{Z_n}, \quad I_1 = \frac{F^2 \sin \Omega \cos \Omega - E^2 \sin \Omega \cos \Omega}{Z_n} = 2 \frac{\sin 2\Omega}{Z_n},$$

$$\text{де, в свою чергу, } Z_n = (F \cos \Omega)^2 + (E \sin \Omega)^2.$$

Амплітудно-фазова характеристика (1.11) з урахуванням формул (1.12), (1.13)

зводиться до вигляду:  $W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(j\omega) = \frac{1}{1 + b\Omega(1+j)(R_1 + jI_1)}$ . Введемо позначення:

$$R_2 = 1 + b\Omega(R_1 - I_1), \quad I_2 = b\Omega(R_1 + I_1).$$

$$\text{Тоді } W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(j\omega) = \frac{1}{R_2 + jI_2} = X + jY, \quad (1.14)$$

$$\text{де } X = \frac{R_2}{R_2^2 + I_2^2}; \quad Y = -\frac{I_2}{R_2^2 + I_2^2}.$$

Розглянутий алгоритм обчислення можна оформити у вигляді підпрограми UrGod, котра орієнтується на глобальні параметри Lam( $\lambda$ ), A0( $\alpha_0$ ), A(a), Delta( $\delta$ ) та w( $\omega$ ), формує значення дійсно-частотної X та уявно-частотної Y характеристик досліджуваного каналу:

```

Procedure UrGod;
Var b, Om, R1, I1, R2, I2, E, F, Zn: real;
Begin
  b:=A0/(Lam*Delta);
  Om:=Delta*sqrt(w/2/A);
  E:=exp(Om)-exp(-Om);
  F:=exp(Om)+exp(-Om);
  Zn:=sqr(F*cos(Om))+sqr(E*sin(Om));
  R1:=E*F/Zn;
  I1:=2*sin(2*Om)/Zn;
  R2:=1+b*Om*(R1-I1);
  I2:=b*Om*(R1+I1);
  Zn:=sqr(R2)+sqr(I2);
  X:=R2/Zn;
  Y:=-I2/Zn
End;
```

На рис.1.1 показано годограф  $W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(j\omega)$ , побудований з використанням процедури UrGod.

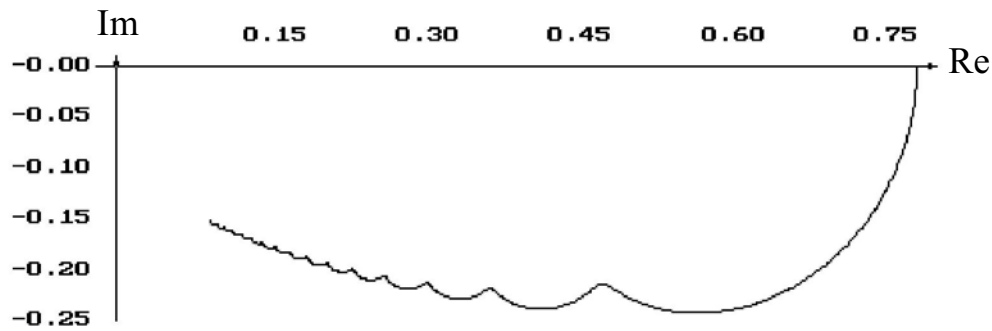


Рис.1.1. Годограф за формулою (1.11) ( $\lambda=40 \text{ Вт}/(\text{м}^{\circ}\text{C})$ ;  $\alpha_0=5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ }^{\circ}\text{C})$ ;  $a=1.14 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $x=0.0015 \text{ м}$ ;  $\delta=0.15 \text{ м}$ )

Тепер розрахуємо амплітудно-фазову характеристику, яка відповідає передаточній

функції (1.10): 
$$W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{j\omega}{a}}} \quad (1.15)$$

Подамо  $\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{j\omega}{a}}$  як  $\Omega(1+j)$ , де  $\Omega = \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$ .

Тоді 
$$W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(j\omega) = \frac{1}{1 + \Omega(1+j)},$$

або 
$$W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(j\omega) = X + jY, \quad (1.16)$$

де 
$$X = \frac{1+\Omega}{Zn}; \quad Y = \frac{-\Omega}{Zn},$$

де, в свою чергу,  $Zn = (1+\Omega)^2 + \Omega^2$ .

Розрахунок за формулою (1.16) можна оформити у вигляді підпрограми UrGod1:

```

Procedure UrGod1;
Var Om1, Zn: real;
Begin
  Om1:=Lam/A0*sqrt(w/(2*A));
  Zn:=sqr(1+Om1)+sqr(Om1);
  X:=(1+Om1)/Zn;
  Y:=-Om1/Zn
End;
```

Тут, як і в  $UrGod$ ,  $X$ ,  $Y$  – значення дійсно- та уявно-частотної характеристик згідно з формулою (1.16). На рис.1.2 показано годограф, розрахований з використанням  $UrGod1$ .

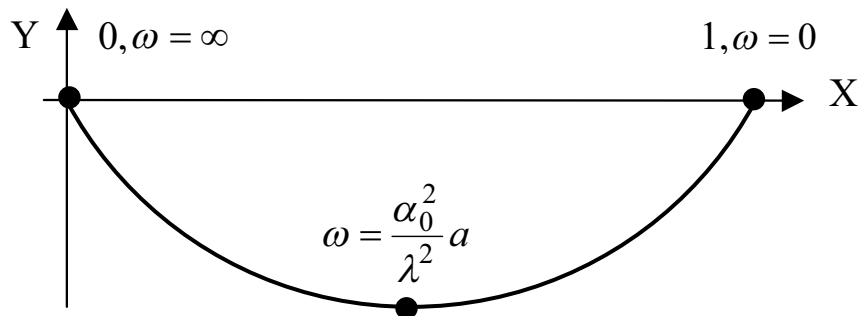


Рис.1.2. Годограф за формулою (1.16)

Спробуємо знайти явну формулу кривої, показаної на рис.1.2. Додамо значення  $X$  та

$$Y \text{ у формулі (1.16): } X + Y = \frac{1}{Zn}. \quad (1.17)$$

$$\text{А тепер поділимо значення } Y \text{ в (1.16) на (1.17): } \frac{Y}{X + Y} = -\Omega. \quad (1.18)$$

$$\text{Підставимо значення } \Omega \text{ з (1.18) у вираз для } Y \text{ в (1.16): } Y = \frac{\frac{Y}{X + Y}}{\left(1 + \frac{Y}{X + Y}\right)^2 + \left(\frac{Y}{X + Y}\right)^2}.$$

Після спрощення маємо:  $X^2 + Y^2 = X + Y$ ,

$$\text{або} \quad \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2. \quad (1.19)$$

Це рівняння кола з центром у точці  $X_c = \frac{1}{2}$ ,  $Y_c = \frac{1}{2}$  та радіусом  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , в чому можна пересвідчитись на рис.1.2. При додатних значеннях  $\Omega$  реалізується чверть кола, розташована в четвертому квадранті.

При  $\Omega = 0$  ( $\omega = 0$ ) маємо  $X=1$ ,  $Y=0$ . При  $\Omega = \infty$  ( $\omega = \infty$ ), відповідно,  $X=0$ ,

$Y=0$  (початок координат). У нижній точці, як можна пересвідчитися,  $\omega = \frac{\alpha_0^2 a}{\lambda^2}$ .

А тепер розглянемо різні варіанти апроксимації передаточної функції (1.19) залежно від діапазону частот, на який орієнтується апроксимуюча передаточна функція.

$$\text{Коли } \omega \rightarrow 0 \text{ (відповідно } p \rightarrow 0), \text{ очевидно, що: } W_1(p) \Big|_{p \rightarrow 0} \cong 1. \quad (1.20)$$

Це означає, що при дуже низьких частотах температура поверхні стінки, що омивається теплоносієм, буде практично відслідковувати зміни температури теплоносія. При таких низьких частотах стінка прогрівається цілком, повторюючи температуру теплоносія, і її теплоакумуюча здатність може просто приєднуватись до теплоакумуючої здатності теплоносія, який цю стінку омиває.

Розкладемо  $th\left(\delta\sqrt{\frac{p}{a}}\right)$  в ряд Маклорена [17].

$$\text{Відомо, що} \quad th(x) = x \left( 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 - \frac{17}{315}x^6 + \dots \right),$$

$$\text{отже} \quad th\left(\delta\sqrt{\frac{p}{a}}\right) = \delta\sqrt{\frac{p}{a}} \left[ 1 - \frac{1}{3}\left(\delta\sqrt{\frac{p}{a}}\right)^2 + \frac{2}{15}\left(\delta\sqrt{\frac{p}{a}}\right)^4 - \frac{17}{315}\left(\delta\sqrt{\frac{p}{a}}\right)^6 + \dots \right].$$

Підставляємо цей вираз в (1.9)

$$W_{\theta^{S,L} \rightarrow \theta|_{x=0}}(p) = \frac{1}{1 + a_1 p - a_2 p^2 + a_3 p^3 - a_4 p^4 + \dots}, \quad (1.21)$$

$$\text{де} \quad a_1 = \frac{\delta \rho c}{\alpha_0}; \quad a_2 = \frac{1}{3} \frac{\delta^3 \rho c}{\alpha_0 a}; \quad a_3 = \frac{2}{15} \frac{\delta^5 \rho c}{\alpha_0 a^2}; \quad a_4 = \frac{17}{315} \frac{\delta^7 \rho c}{\alpha_0 a^3}.$$

Обмежуючись у знаменнику (1.21) двома першими доданками, дістаємо:

$$W_2(p) \cong \frac{1}{T p + 1}, \quad (1.22)$$

$$\text{де} \quad T = a_1 = \frac{\delta \rho c}{\alpha_0}.$$

Формула (1.22) задає передаточну функцію аперіодичної ланки першого порядку. Це означає, що стінка веде себе як окрема зосереджена теплоакумуюча ємність, що взаємодіє з ємністю омиваючого її теплоносія.

Якщо в (1.21) врахувати три перші доданки знаменника, то апроксимуюча передаточна функція буде явно нестійкою, отже її використання, напевне,

недоцільне. Те саме можна сказати і про варіант з будь-яким іншим числом враховуваних членів (більшим від двох), оскільки не виконується необхідна умова стійкості.

Отже, доводиться визнати, що при віддаленні частоти від нульового значення стінка перестає встигати рівномірно прогріватись (охолоджуватись), як це було характерно для апроксимації (1.22), і при гармонічному законі зміни температури омиваючого теплоносія температурні хвилі, розповсюджуючись по товщині стінки та відбиваючись від протилежної поверхні ( $x=\delta$ ) стінки, не дозволяють апроксимувати її однією із загальноновживаних структур апроксимуючої передаточної функції. Не ставлячи зараз задачу пошуку підходящої нетрадиційної апроксимуючої структури, візьмемо структуру (1.9) за апроксимуючу:

$$W_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{th}\left(\delta \sqrt{\frac{p}{a}}\right)}. \quad (1.23)$$

Аналізуючи підпрограму `UrGod`, уважний читач, очевидно, звернув увагу на відсутність у ній блокування на випадок переповнення розрядної сітки комп'ютера при великих значеннях  $\Omega m$  (тобто  $\Omega = \delta \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$ ). Коли  $\Omega > 88$ , функції  $\exp(\Omega m)$  та  $\exp(-\Omega m)$  виводять програму на аварійну зупинку. Відсутність подібного блокування пояснюється бажанням спростити процедуру, а з іншого боку, мається на увазі, що акуратний дослідник не стане використовувати процедуру `UrGod` при таких великих значеннях частот. Але ж не виключено, що для вирішення деяких проблем треба мати апроксимуючу структуру, адекватну об'єкту на високих частотах.

Відомо, що при великих значеннях аргументу тангенс гіперболічний може бути розкладений в ряд типу:  $\operatorname{th}(x) = 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} - 2e^{-6x} + \dots$

Утримуючи в цьому ряду лише його перший член, можна звести передаточну функцію (1.9) до вигляду:

$$W_3(p) \cong \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}}}. \quad (1.24)$$

Але ж це передаточна функція (1.10) напівобмеженої стінки ( $\delta = \infty$ ). Воно й зрозуміло: температурні хвилі, що виникають як реакція на високочастотні коливання

температури омиваючого теплоносія, не доходять до поверхні  $x=\delta$ , отже існування цієї поверхні не впливає на зміну температури поверхні  $x=0$ , тобто можна вважати, що  $\delta \rightarrow \infty$ . І, нарешті, при подальшому збільшенні  $p$  (а отже, і частоти  $\omega$ ) передаточна функція (1.24) дає:

$$W_4(p) = 0. \quad (1.25)$$

Це означає, що кількість тепла, яке встигає стінка поглинати чи віддавати протягом півперіоду високочастотних коливань настільки незначна, що при аналізі динаміки температури омиваючого її теплоносія нею спокійно можна знехтувати.

Підсумовуючи сказане, можна відзначити, що коли важливо адекватно моделювати поведінку досліджуваного об'єкта в певному конкретному діапазоні частот, то треба звернути особливу увагу на вибір відповідної апроксимуючої (моделюючої) структури. Ну і звичайно ж, доводиться брати до уваги й інші особливості апроксимуючої структури, як, наприклад, стійкість, простоту, зручність користування, не кажучи вже про необхідний рівень точності.

## **1.2. Залежність структури апроксимуючої передаточної функції об'єкта від коефіцієнта передачі розімкненої системи**

До вибору структури моделі динамічної системи можна підійти і з іншого боку, а саме з точки зору її адекватності об'єкту при зміні характеру і темпу проходження перехідних процесів у досліджуваній системі, наприклад, при підвищенні інтенсивності регулюючих впливів, як це має місце при збільшенні, скажімо, коефіцієнта передачі регулятора. Для спрощення аналізу будемо вважати, що вихід за межі лінійності, який раніше чи пізніше буде супроводжувати подібну інтенсифікацію роботи системи, не має місця (не враховується).

Вплив коефіцієнта добротності (коефіцієнта передачі розімкненої системи) на динамічні властивості замкненої системи зручно досліджувати методом кореневого годографа [31], який, до речі, користується великою популярністю у Сполучених Штатах Америки та в інших країнах Заходу. Почнемо з найпростішого варіанта

апроксимації. Будемо вважати, що модель об'єкта автоматичного керування задається аперіодичною ланкою першого порядку, тобто:

$$W_{об_1}(p) = \frac{K_{об}}{T_1 p + 1}, \quad (1.26)$$

а регулятор реалізує П-закон регулювання:  $W_{рег}(p) = K_{рег}$ . (1.27)

Подамо передаточну функцію розімкненої системи, як це прийнято в методі кореневого годографа, у вигляді:

$$W_{роз_1}(p) = K \frac{1}{p + \frac{1}{T_1}}, \quad (1.28)$$

де  $K = \frac{K_{об} K_{рег}}{T_1}$ .

Як видно з (1.28), система в розімкненому стані не має нулів, і має лише один полюс, що дорівнює  $-\frac{1}{T_1}$ . Її кореневий годограф показано на рис.1.3.

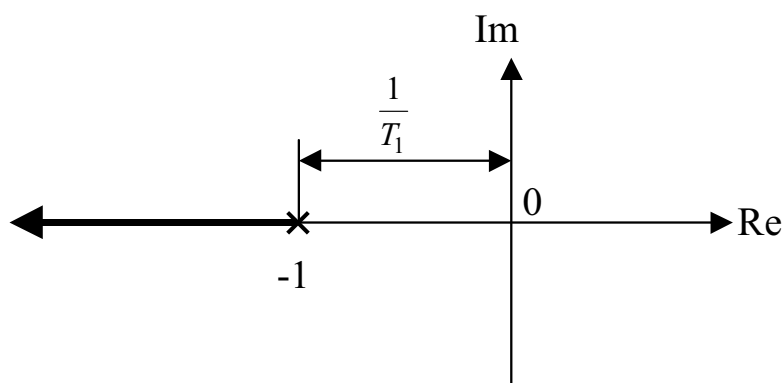


Рис.1.3. Кореневий годограф системи (1.28),  $T_1=1$

Єдина гілка, показана жирною лінією, починається в точці  $\left(-\frac{1}{T_1} + j0\right)$  і йде вздовж дійсної осі в напрямку  $-\infty$ . Це означає, що при збільшенні  $K$  (а отже, і  $K_{об} K_{рег} = K_{роз}$ ) ступінь стійкості замкненої системи збільшується (швидкодія системи зростає), в той же час перехідні процеси залишаються аперіодичними. Замкнена система веде себе як аперіодична ланка, стала часу якої наближається до нуля при зростанні  $K$ .

Про таку поведінку замкненої системи можна було б тільки мріяти, але її ідеальність насторожує – так гарно не може бути! Ну, насправді – давайте подумаємо. При математичному моделюванні об'єкта, очевидно, було взято до уваги інерційність найбільшої акумулюючої ємності і проігноровано існування ємності з меншою акумулюючою здатністю. Поки темп перехідних процесів у системі був невисокий (а це мало місце при відносно малих  $K$ ), математична модель (1.26) об'єкта нас цілком задовольняла, але при підвищенні швидкодії системи (при збільшенні  $K$ ), очевидно, темп проходження процесів в системі стає настільки високим, що інерційність, якою при менших  $K$  можна було знехтувати, починає суттєво впливати на поведінку системи. Врахуємо додаткову інерційність, домножуючи передаточну функцію об'єкта на  $\frac{1}{T_2 p + 1}$ , де  $T_2 < T_1$ .

Тоді 
$$W_{об_2}(p) = \frac{K_{об}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (1.29)$$

а 
$$W_{роз_2}(p) = K \frac{1}{\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right)}, \quad (1.30)$$

де 
$$K = \frac{K_{об} K_{рег}}{T_1 T_2}.$$

Кореневий годограф замкненої системи, що відповідає передаточній функції (1.29), показано на рис.1.4.

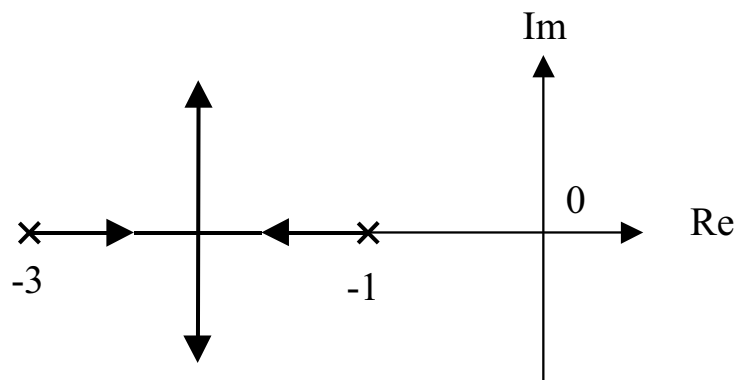


Рис.1.4. Кореневий годограф системи (1.29),  $T_1=1$ ,  $T_2=0.33$

Як видно з рис.1.4, поведінка замкненої системи (1.29) при малих  $K$  буде схожою на поведінку системи (1.28), але при збільшенні  $K$  їх поведінка починає все

більше відрізнятись. Замість того, щоб залишатись аперіодичною, система стає коливальною, причому частота коливань зростає з ростом  $K$ , а от ступінь стійкості системи, починаючи з деякого  $K$ , перестає зростати, стабілізуючись на рівні

$$\left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) / 2, \text{ а отже, перестає підвищуватись і швидкодія системи. Такого в системі}$$

(1.28) не спостерігалось.

А що, коли в об'єкті або в регуляторі (у розімкненому контурі) існує ще якась інерційність, яку можна було б відобразити, скажімо, аналогічно тому, як ми зробили перед цим. Тобто, розімкнена система набуває вигляду:

$$W_{розз}(p) = K \frac{1}{\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right)\left(p + \frac{1}{T_3}\right)}, \quad (1.31)$$

де  $T_3 < T_2$ ;  $K = \frac{K_{об} K_{рег}}{T_1 T_2 T_3}$ .

Кореневий годограф, що відповідає системі (1.31), показано на рис.1.5.

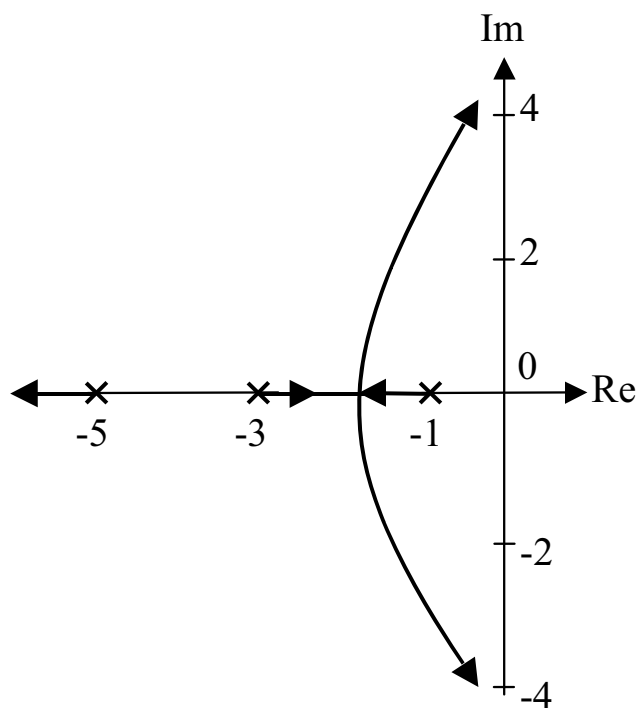


Рис.1.5. Кореневий годограф системи (1.31),  $T_1=1$ ,  $T_2=0.33$ ,  $T_3=0.2$

З рис.1.5 видно, що при зростанні  $K$  (звертаємо увагу читача на те, що для різних систем значення  $K$  – різне) в даній системі не лише з'являється схильність до коливань, але, більше того, ступінь стійкості починає зменшуватись, аж до повної втрати стійкості системою. Такого (щоб втратити стійкість!) не було в системі (1.30), не кажучи вже про (1.28).

Коли врахувати ще одну інерційність, наприклад, ще меншу, ніж відображені в (1.31), то передаточну функцію розімкненої системи можна подати як:

$$W_{роз4}(p) = K \frac{1}{\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right)\left(p + \frac{1}{T_3}\right)\left(p + \frac{1}{T_4}\right)}, \quad (1.32)$$

де  $T_4 < T_3$ ;  $K = \frac{K_{об} K_{рег}}{T_1 T_2 T_3 T_4}$ .

Кореневий годограф для (1.32) показано на рис.1.6.

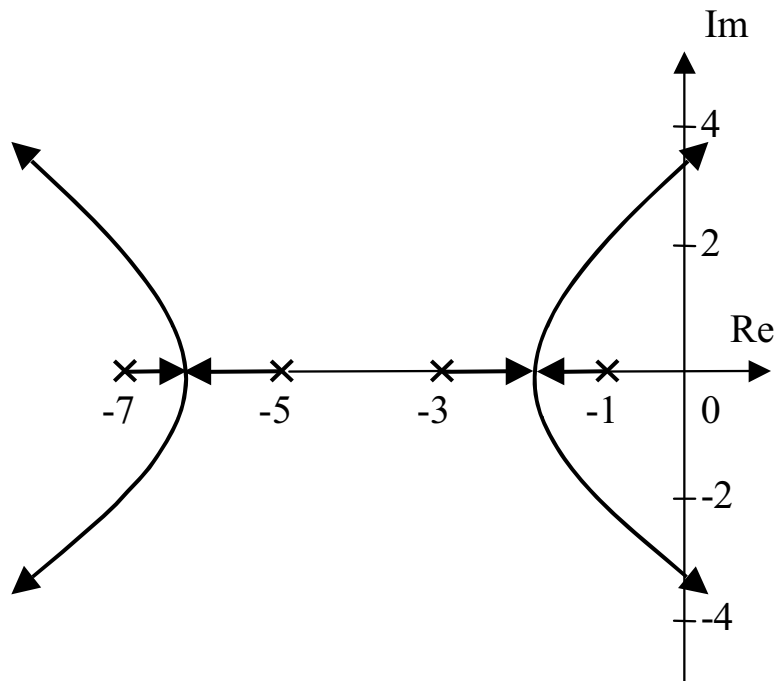


Рис.1.6. Кореневий годограф системи (1.32),  $T_1=1$ ,  $T_2=0.33$ ,  $T_3=0.2$ ,  $T_4=0.14$

Тут уже стають можливими режими з двочастотними коливальними складовими, чого раніше за даною системою не спостерігалось.

І подібне уточнення моделі системи можна продовжувати. Не тільки в об'єкті, але і в регуляторі можуть виявитись інерційності, потреба у врахуванні яких може

виникнути при збільшенні  $K$ . Але і сказаного та показаного досить, щоб переконатись у необхідності узгодження структури моделі (ступеня її детальності та “глибини” адекватності) від умов роботи системи, зокрема, від настроєння регулятора.

### **1.3. Залежність похибки у визначенні динамічних характеристик від структури моделі**

При моделюванні будь-якого об’єкта принциповим є відповідність структури моделі глибинним (структурним) властивостям об’єкта моделювання. Ну, скажімо, безперспективним буде підбирати параметри ланцюжка послідовно з’єднаних аперіодичних ланок першого порядку, щоб наблизити його поведінку до поведінки коливальної, чи, тим більше, консервативної ланки. У моделі, принаймні, повинні бути закладені задатки якихось “здібностей”, які можна було б розвинути до потрібного рівня. Коли цього нема, моделювання приречене на неуспіх.

Але ж побачити в об’єкті та, відповідно, закласти у модель потрібні “здібності”, не так просто. Тут дослідника може підстерігати небезпека того, що модель може вийти з-під контролю, стати, так би мовити, некерованою. При моделюванні об’єктів із зосередженими параметрами, що, відповідно, описуються дробово-раціональними передаточними функціями, структура виявляє себе, зокрема, у полюсах передаточної функції, тобто у коренях характеристичного рівняння. Якщо знаменник передаточної функції має високий степінь (система високого порядку), то визначення його коренів є досить трудомісткою обчислювальною задачею (мається на увазі чисельний алгоритм визначення коренів).

Трудомісткість тут згадана навмисне, щоб акцентувати увагу читача на тій обставині, що для визначення коренів полінома високого степеня треба виконати великий обсяг обчислень, в процесі якого неминуче виникають і можуть накопичуватись похибки і, очевидно, чим більше таких обчислень, тим більшими можуть бути похибки.

Для ілюстрації сказаного наведемо графік полінома

$$A(p) = p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1, \quad (1.33)$$

сформований комп'ютером, (рис.1.6) (значення полінома обчислювались за схемою Хорнера, до речі, однією з найекономічніших, тобто з мінімальною кількістю елементарних операцій – додавання та множення).

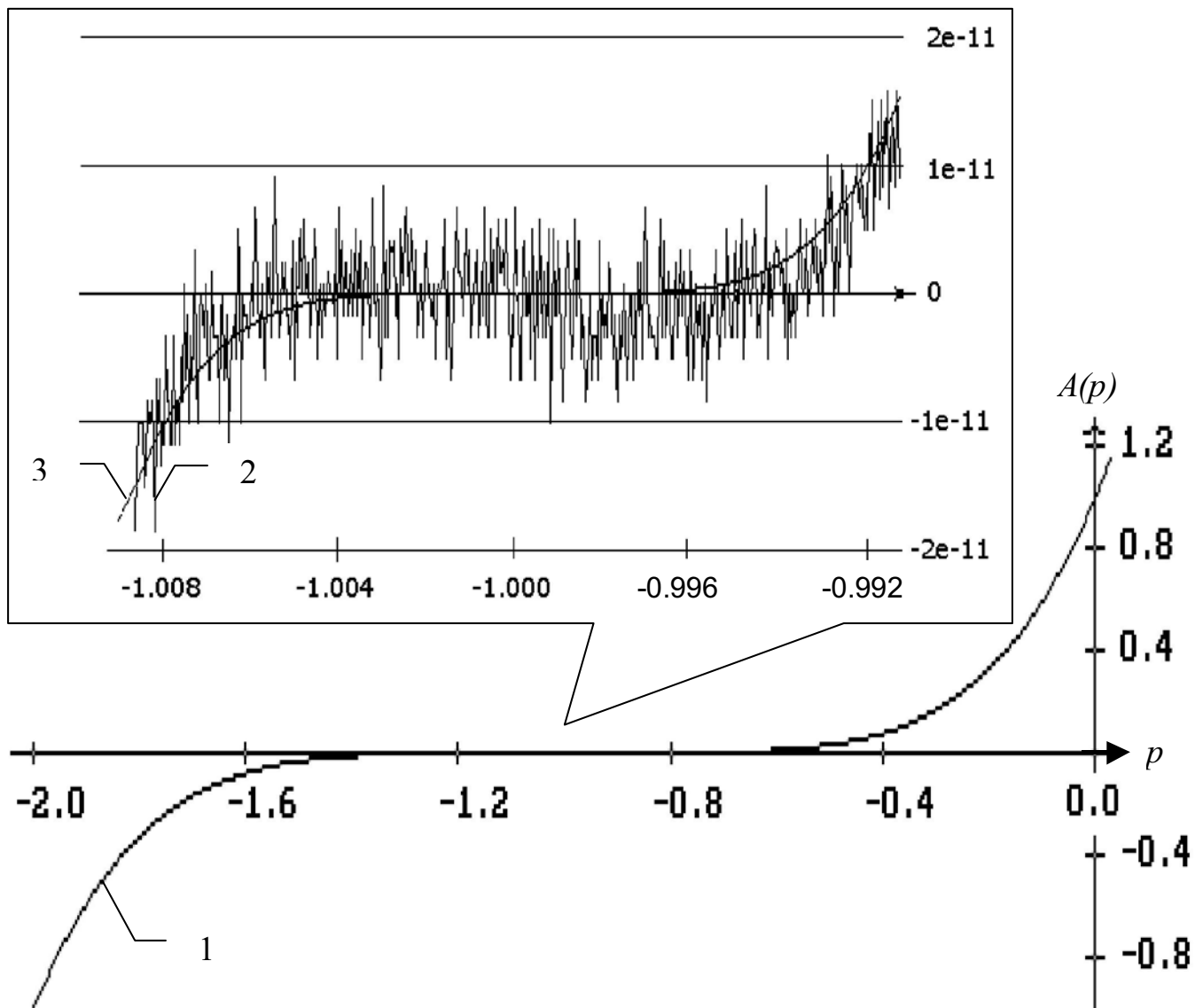


Рис.1.6. Графік полінома (1.33), обчислений комп'ютером за схемою Хорнера

“Хвилястість” графіка пояснюється похибками в обчисленні значення полінома. І саме ця “хвилястість” ставить межу підвищенню точності при визначенні коренів цього полінома. Очевидно, що точніше, ніж  $\pm 5e-3$  - визначити корінь неможливо. Після визначення кореня, його треба буде виключити із досліджуваного полінома – похибка у визначенні кореня приведе до того, що редукований поліном буде не зовсім тим, яким він мав би бути (якби корінь визначався точно і виключення цього кореня не супроводжувалось би новими похибками). Черговий корінь редукованого полінома знову ж таки визначається з похибкою і т. д.

Наведемо корені, визначені комп'ютером за допомогою програми TARAN:

$$\begin{aligned} p_1 &= -0.9959 + j \cdot 5.3490 \cdot 10^{-4}; \\ p_2 &= -0.9959 - j \cdot 5.3490 \cdot 10^{-4}; \\ p_3 &= -1.0007 + j \cdot 6.3676 \cdot 10^{-3}; \\ p_4 &= -1.0007 - j \cdot 6.3676 \cdot 10^{-3}; \\ p_5 &= -1.0068. \end{aligned} \quad (1.34)$$

А тепер можна відкрити невелику таємницю: поліном (1.33) був сформований як  $(p+1)^5$ , тобто він має п'ятикратний корінь, що дорівнює  $-1$ :

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = -1. \quad (1.35)$$

Порівняння (1.34) з (1.35) говорить само за себе. Якщо коренями (1.34) буде надалі користуватись фахівець, то він, можливо, зверне увагу на те, що корені (1.34) практично однакові, та, знову ж таки, можливо, йому прийде у голову "округлити" їх до  $-1$ .

А як ні? Спробуйте сформулювати критерій, які корені можна (чи треба?) вважати достатньо близькими і яким чином їх "округляти". Щоб не здавалося замало, можна додати, що цей критерій повинен враховувати те, що саме Ви далі збираєтесь робити з цими коренями, на яких технічних засобах і користуючись якими алгоритмами...

Щоб проілюструвати вплив похибок у визначенні коренів на результати подальших досліджень, розглянемо розрахунок перехідних характеристик аперіодичної другого порядку та коливальної ланок.

Нехай 
$$W(p) = \frac{k}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad (1.36)$$

де 
$$a_1^2 - 4a_2 > 0. \quad (1.37)$$

Корені полінома в знаменнику передаточної функції (1.36):

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_2}, \quad (1.38)$$

а якщо взяти до уваги умову (1.37), то:

$$p_1 \neq p_2. \quad (1.39)$$

Зображення перехідної характеристики (реакції на одиничний ступінчастий вхідний сигнал за нульових початкових умов) буде:

$$\bar{h}(p) = \frac{k}{(a_2 p^2 + a_1 p + 1)p},$$

або:

$$\bar{h}(p) = \frac{k/a_2}{(p-p_1)(p-p_2)p}. \quad (1.40)$$

Розкладемо праву частину останнього виразу на елементарні доданки:

$$\frac{k/a_2}{(p-p_1)(p-p_2)p} \equiv \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2}. \quad (1.41)$$

Легко

переконатися

що:

$$A_0 = \left. \frac{k}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} \right|_{p=0} = k; \quad (1.42)$$

$$A_1 = \left. \frac{k/a_2}{(p-p_2)p} \right|_{p=p_1} = \frac{k}{a_2 (p_1 - p_2)p_1}; \quad (1.43)$$

$$A_2 = \left. \frac{k/a_2}{(p-p_1)p} \right|_{p=p_2} = \frac{k}{a_2 (p_2 - p_1)p_2}. \quad (1.44)$$

Отже,

$$h(t) = k + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.45)$$

А тепер уявімо, що корені  $p_{1,2}$  знайдені наближено, з деякими похибками. І за рахунок цих похибок корені, які мали б бути, наприклад, однаковими, виявилися різними, але, зрозуміло, близькими один до одного. Тоді формально умова (1.39) буде виконана і подальші розрахункові формули (1.40) – (1.45) – коректними. Але звернемо увагу на коефіцієнти (1.43), (1.44). За рахунок того, що  $p_1 \approx p_2$ , вони стануть дуже великими за модулем і протилежними за знаками. Оскільки ці

коефіцієнти будуть визначатись, знову ж таки, з похибками, то цілком імовірно, що абсолютні значення похибок можуть виявитись як завгодно великими.

Щоб оцінити вплив цих похибок на результат (1.45), розглянемо  $h(t)$  при  $t = 0$ .

Очевидно, що:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = k + A_1 + A_2. \quad (1.46)$$

Так от, за рахунок згаданих похибок умова (1.46) може як завгодно сильно відрізнятись від нуля (і навіть від  $k$ ). В подібній ситуації розв'язок (1.45) втрачає будь-яку цінність.

$$\text{Розглянемо тепер варіант, коли: } a_1^2 - 4a_2 = 0. \quad (1.47)$$

$$\text{Тоді} \quad p_1 = p_2 = \frac{-a_1}{2a_2} \quad (1.48)$$

$$\text{і} \quad \bar{h}(p) = \frac{k/a_2}{(p-p_1)^2 p} = \frac{B_0}{p} + \frac{B_1}{p-p_1} + \frac{B_2}{(p-p_2)^2}. \quad (1.49)$$

$$\text{Коефіцієнти} \quad B_0 = k; \quad (1.50)$$

$$B_1 = -k; \quad (1.51)$$

$$B_2 = \left. \frac{k/a_2}{p} \right|_{p=p_1} = \frac{k}{a_2 p_1}. \quad (1.52)$$

$$\text{Розв'язок} \quad h(t) = k - ke^{p_1 t} + \frac{k}{a_2 p_1} te^{p_1 t}. \quad (1.53)$$

Структура моделі (однакові корені  $p_1 = p_2$ ) тут відповідає структурі об'єкта, що моделюється, тому проблем з розв'язком не виникає. Невеликі похибки, неминучі при визначенні коренів та коефіцієнтів, суттєвого впливу на розв'язок не справляють.

І, нарешті, розглянемо випадок, коли, скажімо, за рахунок похибок в обчисленні значення  $a_1^2 - 4a_2$  корені (1.38) виявились, принаймні формально, комплексними, тобто:

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \quad (1.54)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{-a_1}{2a_2}; \quad (1.55)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2a_2}. \quad (1.56)$$

В такому випадку:

$$\bar{h}(p) = \frac{k/a_2}{(p-\alpha-j\beta)(p-\alpha+j\beta)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p-\alpha-j\beta} + \frac{A_2}{p-\alpha+j\beta}. \quad (1.57)$$

Коефіцієнти:

$$A_0 = \left. \frac{k}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} \right|_{p=0} = k; \quad (1.58)$$

$$A_1 = \left. \frac{k/a_2}{(p-\alpha+j\beta)p} \right|_{p=\alpha+j\beta} = \frac{k/a_2}{2j\beta(\alpha+j\beta)} = \frac{k}{2a_2\beta(-\beta+j\alpha)} = \quad (1.59)$$

$$= \frac{-k(\beta+j\alpha)}{2a_2\beta(\beta^2+\alpha^2)} = -\frac{k}{2} - j\frac{k\alpha}{2\beta};$$

$$A_2 = -\frac{k}{2} + j\frac{k\alpha}{2\beta}.$$

$$\text{Розв'язок: } h(t) = k - \frac{k}{2} \left[ \left(1 + j\frac{\alpha}{\beta}\right) e^{(\alpha+j\beta)t} - \left(1 - j\frac{\alpha}{\beta}\right) e^{(\alpha-j\beta)t} \right].$$

Спростимо його:

$$\begin{aligned} h(t) &= k - \frac{k}{2} e^{\alpha t} \left[ \left(1 + j\frac{\alpha}{\beta}\right) (\cos \beta t + j \sin \beta t) + \left(1 - j\frac{\alpha}{\beta}\right) (\cos \beta t - j \sin \beta t) \right] = \\ &= k - \frac{k}{2} e^{\alpha t} \left[ \cos \beta t + j \sin \beta t + j\frac{\alpha}{\beta} \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t - j \sin \beta t - \right. \\ &\quad \left. - j\frac{\alpha}{\beta} \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right]; \end{aligned}$$

$$h(t) = k - k e^{\alpha t} \left( \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right). \quad (1.60)$$

Формула (1.60) показує, що за рахунок похибок в обчисленні коренів  $p_{1,2}$ , які за відсутності похибок мали б бути дійсними однаковими, а виявились комплексними спряженими з маленькими значеннями  $\beta$ , за рахунок малості  $\beta$  коефіцієнт при

$\sin \beta t$  в (1.60) визначається з великою відносною (а отже, і з великою абсолютною) похибкою, і розв'язок (1.60) може як завгодно сильно відрізнятись від точного (1.53).

Наведені міркування, сподіваємося, переконують читача в тому, що помилки у визначенні структури (в цьому випадку - типу коренів знаменника передаточної функції), які обумовлюються похибками у визначенні цих коренів, можуть зводити на ніщо результати моделювання.

Звичайно, похибки у визначенні коренів квадратного полінома легко усунути, чи, відповідно, мінімізувати їх вплив на результати моделювання, чого не можна зробити у більш складних випадках.

Для ілюстрації розглянемо перехідну характеристику ланцюжка послідовно з'єднаних однакових аперіодичних ланок першого порядку:

$$\bar{h}(p) = \frac{k}{(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1)p}, \quad (1.61)$$

$$\text{де} \quad a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1 \equiv (Tp + 1)^n. \quad (1.62)$$

Будемо вважати, що тотожність (1.62) відома нам з вами, але “невідомо” комп'ютеру, який буде шукати оригінал для зображення (1.61).

Якщо має місце (1.62), то оригінал для (1.61) визначається за відомою

$$\text{формулою:} \quad h(t) = k \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{t_1}{1!} + \frac{t_1^2}{2!} + \dots + \frac{t_1^{n-1}}{(n-1)!} \right] e^{-t_1} \right\}, \quad (1.63)$$

де  $t_1 = \frac{t}{T}$ . При користуванні формулою (1.63) жодних проблем не виникає (відповідність структур повна).

А тепер нехай  $n=5$  і знаменником (1.61) є поліном (1.33) з коренями (1.34). Оригінал для (1.61), знайдений програмою TARAN, яка округляє корені, має вигляд:

$$h(t) = 1 + \left[ -1.1341 - 1.1059t - 1.0784 \frac{t_1^2}{2!} - 1.0516 \frac{t_1^3}{3!} - 1.0255 \frac{t_1^4}{4!} \right] e^{-0.9985t}, \quad (1.64)$$

а його розв'язок має вигляд, що зображений на рис.1.7 графік 1 (для зіставлення на цьому ж рисунку показано графік, побудований за формулою (1.63), графік 2). Для більших значень  $n$  розбіжність між графіками стає ще більш переконливою.

Ще більш “ефектними” можуть бути похибки при розрахунку перехідних процесів у об’єктах та замкнених системах керування, де залежно від змінюваних параметрів системи, наприклад, від параметрів настроєння регулятора, можуть виникати ситуації, коли, наприклад, перехідна характеристика стає абсолютно неправдоподібною.

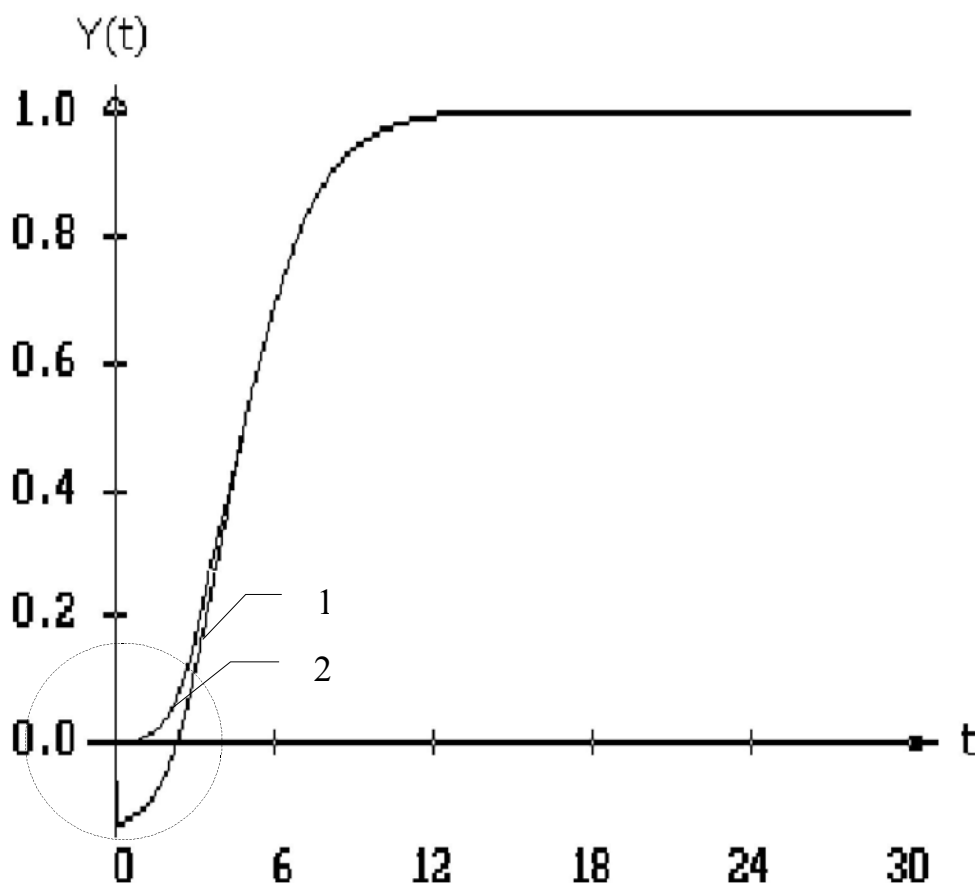


Рис.1.7. Перехідні характеристики для об’єкта (1.65)

## 1.4. Особливості апроксимації динамічних характеристик трубчастих теплообмінників

При автоматизації технологічних процесів у хімічній та харчовій промисловості, в енергетиці часто зустрічаються об'єкти в динамічному відношенні подібні до трубопроводу, по якому, наприклад, переміщується теплоносій, а стінки цього трубопроводу можуть обмінюватись теплом з цим теплоносієм, з одного боку, а також з іншим теплоносієм чи оточуючим середовищем, з іншого. Для простоти обмежимося розглядом теплообмінника типу трубопроводу з відносно тонкими теплоакумулюючими стінками.

Система диференціальних рівнянь такого об'єкта має вигляд [17, 24, 32]:

$$\begin{cases} T_0 \frac{\partial \theta^0}{\partial t} + W_0 T_0 \frac{\partial \theta^0}{\partial x} + \theta^0 = \theta^1, \\ T_1 \frac{\partial \theta^1}{\partial t} + \theta^1 = b_0 \theta^0 + b_1 \theta^{OS}, \end{cases} \quad (1.66)$$

$$\text{де } T_0 = \frac{S_0 \rho_0 c_0}{\alpha_0 P_0}; \quad T_1 = \frac{S_1 \rho_1 c_1}{\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1}; \quad b_0 = \frac{\alpha_0 P_0}{\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1}; \quad b_1 = 1 - b_0,$$

де, в свою чергу,  $\theta^0$ ,  $\theta^1$  - температури теплоносія та стінки;  $\theta^{OS}$  - температура оточуючого середовища;  $S_0, \rho_0, c_0, W_0$  - площа поперечного перерізу, щільність, коефіцієнт теплоємності теплоносія в трубі та його лінійна швидкість відповідно;  $S_1, \rho_1, c_1$  - площа поперечного перерізу, щільність та коефіцієнт теплоємності матеріалу труби;  $\alpha_0, \alpha_1$  - коефіцієнт тепловіддачі від теплоносія до стінки труби та від стінки до оточуючого середовища;  $P_0, P_1$  - периметри внутрішньої та зовнішньої поверхонь теплообміну для труби в поперечному перерізі.

Початкові умови для визначення передаточних функцій будемо вважати нульовими. Гранична умова:

$$\theta^0 \Big|_{x=0} = \theta^{0,inp}(t). \quad (1.67)$$

Виконаємо тепер над рівняннями (1.66), (1.67) перетворення Лапласа відносно

$$t: \begin{cases} W_0 T_0 \frac{d\bar{\theta}^0}{dx} + (T_0 p + 1)\bar{\theta}^0 = \bar{\theta}^1, \\ (T_1 p + 1)\bar{\theta}^1 = b_0 \bar{\theta}^0 + b_1 \bar{\theta}^{OS}, \end{cases} \quad (1.68)$$

$$\bar{\theta}^0 \Big|_{x=0} = \bar{\theta}^{0,inp}, \quad (1.69)$$

$$\text{де } \bar{\theta}^0 = \int_0^{\infty} \theta^0 e^{-pt} dt; \quad \bar{\theta}^1 = \int_0^{\infty} \theta^1 e^{-pt} dt; \quad \bar{\theta}^{OS} = \int_0^{\infty} \theta^{OS} e^{-pt} dt.$$

Визначимо  $\bar{\theta}^1$  з (1.67) та підставимо його в друге рівняння системи (1.68).

Дістанемо:

$$(T_1 p + 1)[W_0 T_0 \frac{d\bar{\theta}^0}{dx} + (T_0 p + 1)\bar{\theta}^0] = b_0 \bar{\theta}^0 + b_1 \bar{\theta}^{OS},$$

$$\text{або } W_0 T_0 (T_1 p + 1) \frac{d\bar{\theta}^0}{dx} + [(T_1 p + 1)(T_0 p + 1) - b_0] \bar{\theta}^0 = b_1 \bar{\theta}^{OS}. \quad (1.70)$$

Якщо покласти  $\bar{\theta}^{OS} = 0$  (не будемо звертати увагу на канал  $\theta^{OS} \rightarrow \theta^0$ ), то розв'язок (1.70) можна подати як:

$$\bar{\theta}^0 = D e^{-\frac{(T_0 p + 1)(T_1 p + 1) - b_0}{W_0 T_0 (T_1 p + 1)} x}. \quad (1.71)$$

Коефіцієнт  $D$  з урахуванням (1.69) дорівнює  $\bar{\theta}^{0,inp}$ , отже, передаточна функція каналу  $\theta^{0,inp} \rightarrow \theta$  набуває вигляду:

$$W(p) = e^{-\frac{x}{W_0 T_0}} e^{-p \frac{x}{W_0}} e^{\frac{x}{W_0 T_0} \frac{b_0}{(T_1 p + 1)}}. \quad (1.72)$$

Перший множник в (1.72), а саме  $e^{-\frac{x}{W_0 T_0}}$ , можна розглядати як коефіцієнт:

$K_0 = e^{-\frac{x}{W_0 T_0}}$ . Другий множник відображає ефект транспортного запізнювання, де  $\tau$  - час запізнювання:  $\tau = \frac{x}{W_0}$ . Третій множник відображає вплив теплоаккумуляції в

$$\text{стінці: } W(p) = W_1(p) W_2(p), \quad (1.73)$$

$$\text{де } W_1(p) = e^{\frac{b_0 \tau}{(T_1 p + 1) T_0}}; \quad W_2(p) = K_0 e^{-p \tau}. \quad (1.74)$$

Очевидно, що коли  $\alpha_0 p_0 \rightarrow 0$ , то  $b_0 \rightarrow 0$  і

$$W_1(p) \approx 1. \quad (1.75)$$

З іншого боку, при  $\alpha_0 p_0 \neq 0$ , але при  $p \rightarrow 0$ :

$$W_1(p) \approx e^{\frac{b_0 \tau}{T_0}}. \quad (1.76)$$

У випадку (1.75) стінка труби практично не впливає на динаміку температури теплоносія. У випадку ж (1.76) стінка просто ослаблює в  $e^{\frac{b_0 \tau}{T_0}}$  раз коливання температури теплоносія (виконує роль теплового буфера, демпфера). Коли ж  $p > 0$ , то розкладемо (1.74) в ряд:

$$W_1(p) = 1 + \frac{f_0}{T_1 p + 1} + \frac{1}{2!} \left( \frac{f_0}{T_1 p + 1} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{f_0}{T_1 p + 1} \right)^3 + \dots, \quad (1.77)$$

де  $f_0 = \frac{b_0 \tau}{T_0}$ .

Обмежувачись першим членом в (1.79), одержимо апроксимуючу передаточну функцію (1.75). Враховуючи два перших доданки в (1.76), матимемо:

$$W_1(p) \approx K_1 \frac{\alpha T p + 1}{T_1 p + 1}, \quad (1.78)$$

де  $K_1 = 1 + f_0$ ;  $\alpha = \frac{1}{K_1}$ .

Процес уточнення апроксимуючої передаточної функції шляхом врахування чергових доданків в (1.77) можна продовжувати. Але ми б хотіли звернути увагу читача на те, що для апроксимації передаточної функції типу (1.74) доцільно використовувати структуру, що відповідає набору паралельно з'єднаних динамічних елементів, в цьому разі елементів типу аперіодичної ланки:

$$W_2(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}$$

та безінерційної ланки. І тоді ця структура виглядає так:

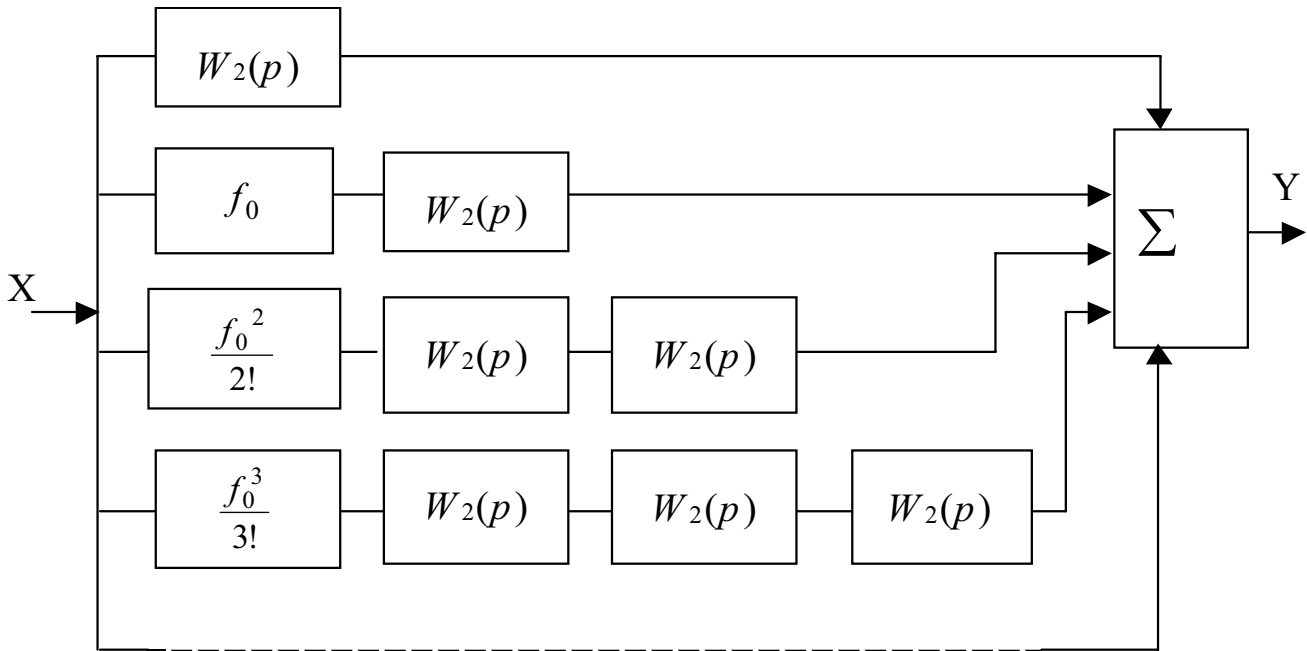


Рис.1.8. Структура передаточної функції (1.77)

Можливо, виявиться доцільним шукати апроксимуючу передаточну функцію у вигляді:

$$W_1(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}, \quad (1.79)$$

порядок якої визначається кількістю врахованих доданків у формулі (1.77).

## 1.5. Залежність апроксимуючої структури від “оточення” досліджуваного динамічного елемента

Рідко досліджуваний динамічний елемент функціонує як такий, найчастіше він входить до складу системи, яка містить, крім нього, й інші динамічні елементи. Похибка в моделюванні системи в цілому, очевидно, залежить від похибок в моделюванні кожного із елементів системи. Але вірне і зворотне твердження, а саме: необхідна точність апроксимації окремого елемента повинна узгоджуватись з точністю апроксимації інших елементів системи і системи в цілому. З іншого боку, інерційність елементів, ввімкнених, скажімо, послідовно з розглядуваним елементом, може ефективно демпфувати коливальні складові апроксимуючої структури елемента, що розглядається. Звідси може впливати недоцільність урахування в

розглядуваному елементі коливальних складових чи, скажімо, недоцільність підвищення порядку апроксимуючої структури. Це пояснюється зсувом діапазону частот системи в той чи інший бік залежно від інерційності та (чи) демпфуючих властивостей “оточення” досліджуваного елемента.

Для ілюстрації сказаного розглянемо кілька можливих варіантів апроксимації ланки транспортного запізнювання дробово-раціональними передаточними функціями.

Одним із найпопулярніших методів апроксимації функції  $e^{-p\tau}$  є використання дробу Паде [16]:

$$e^Z \approx \frac{1 + \frac{n}{1!2n}Z + \frac{n(n-1)}{2!2n(2n-1)}Z^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}Z^n}{1 - \frac{n}{1!2n}Z + \frac{n \cdot (n-1)}{2!2n(2n-1)}Z^2 - \dots + (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}Z^n}. \quad (1.80)$$

Для  $Z = -p\tau$  маємо:

$$e^{-p\tau} \approx \frac{1 - \frac{n}{1!2n}p\tau + \frac{n(n-1)}{2!2n(2n-1)}(p\tau)^2 - \dots + (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}(p\tau)^n}{1 + \frac{n}{1!2n}p\tau + \frac{n(n-1)}{2!2n(2n-1)}(p\tau)^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}(p\tau)^n}. \quad (1.81)$$

Розглянемо дріб (1.81) для ряду значень  $n$ .

$$\text{При } n = 1: \quad e^{-p\tau} \approx \frac{1 - \frac{p\tau}{2}}{1 + \frac{p\tau}{2}}; \quad (1.82)$$

$$n = 2: \quad e^{-p\tau} \approx \frac{1 - \frac{p\tau}{2} + \frac{(p\tau)^2}{12}}{1 + \frac{p\tau}{2} + \frac{(p\tau)^2}{12}}; \quad (1.83)$$

$$n = 3: \quad e^{-p\tau} \approx \frac{1 - \frac{p\tau}{2} + \frac{(p\tau)^2}{10} - \frac{(p\tau)^3}{40}}{1 + \frac{p\tau}{2} + \frac{(p\tau)^2}{10} + \frac{(p\tau)^3}{40}}. \quad (1.84)$$

Цей процес можна продовжувати. Оформимо його у вигляді процедури DrPd, яка формує масиви  $B_n$  та  $A_n$  відповідно з коефіцієнтами поліномів чисельника та знаменника дробу Паде.

```

Procedure DrPd(Tau:real; n:integer; var Aa,Ba:Coef);
var S,Zn,Nom,Denom:integer;
Begin
  Aa[-1]:=n;
  Aa[0]:=1;
  Ba[-1]:=n;
  Ba[0]:=1;
  Nom:=n;
  Denom:=2*n;
  Zn:=-1;
  for S: = 1 to n do
    begin
      Aa[S]:=Aa[S-1]*Tau/Denom/S;
      Ba[S]:=Aa[S]*Zn;
      Zn:=-Zn;
      dec[Nom];
      dec[Denom];
    end
  end;
end;

```

Тут  $\tau$  – це  $\tau$ ,  $n$  – порядок дробу Паде.

На рис.1.9 показано графіки перехідних характеристик дробу Паде для ряду послідовних значень  $n$ . Ці характеристики розраховувались на комп'ютері аналітичним методом (шляхом виконання зворотного перетворення Лапласа).

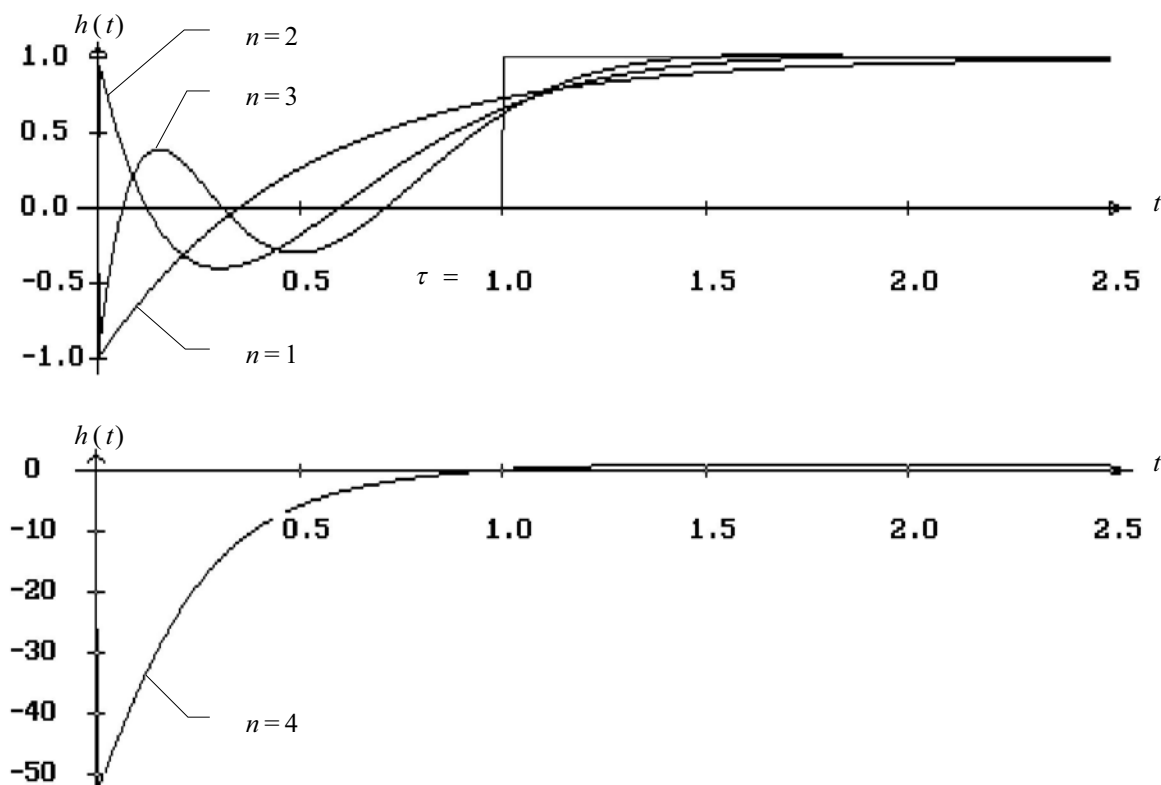


Рис.1.9. Перехідні характеристики дробу Паде, розраховані аналітично

Читачеві, очевидно, буде цікаво розглянути значення коренів знаменника дробу Паде для ряду значень  $n$ . Для зручності і узагальнення наведемо корені  $S = p\tau$ :

$$\begin{aligned}
 n = 1: & \quad S_1 = -2; \\
 n = 2: & \quad S_1 = -3.0000 + j \cdot 1.7321; \\
 & \quad S_2 = -3.0000 - j \cdot 1.7321; \\
 n = 3: & \quad S_1 = -3.6778 + j \cdot 3.5088; \\
 & \quad S_2 = -3.6778 - j \cdot 3.5088; \\
 & \quad S_3 = -4.6444; \\
 n = 4: & \quad S_1 = -4.2075 + j \cdot 1.2993; \\
 & \quad S_2 = -4.2075 - j \cdot 1.2993; \\
 & \quad S_3 = -5.7924 + j \cdot 5.4376; \\
 & \quad S_4 = -5.7924 - j \cdot 5.4376.
 \end{aligned}$$

Крім розглянутого варіанта апроксимації дробом Паде, ланку транспортного запізнювання можна апроксимувати ланцюжком однакових аперіодичних ланок:

$$e^{-p\tau} \approx \frac{1}{(Tp+1)^n}, \quad (1.85)$$

$$\text{де } T = \frac{\tau}{n}.$$

Перехідна характеристика, що відповідає передаточній функції (1.85), як відомо, виражається формулою:

$$h(t) = 1 - e^{-t_1} \sum_{S=0}^{n-1} \frac{t_1^S}{S!}, \quad (1.86)$$

$$\text{де } t_1 = \frac{t}{T} = n \frac{t}{\tau}.$$

Графіки перехідних характеристик, розрахованих за формулою (1.86) для ряду значень  $n$ , наведено на рис.1.10.

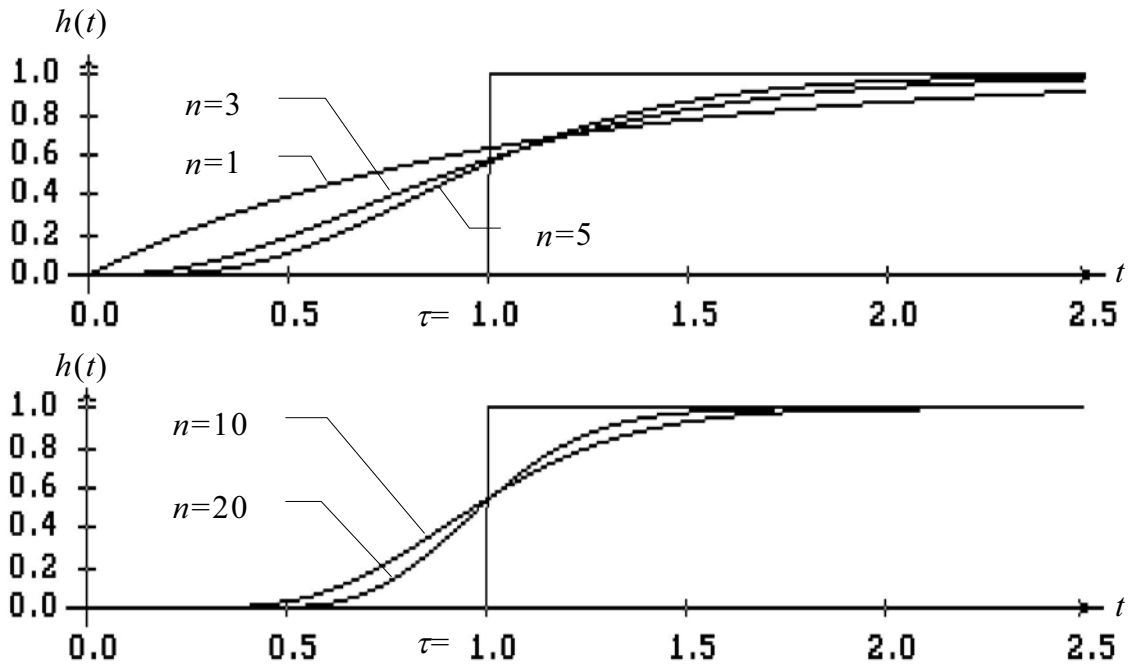


Рис.1.10. Перехідні характеристики, розраховані за формулою (1.86)

На рис.1.11 показано знову ж таки перехідні характеристики, що відповідають передаточній функції (1.85), але розраховані шляхом виконання зворотного перетворення Лапласа, коли корені знаменника відповідного зображення визначаються наближено.

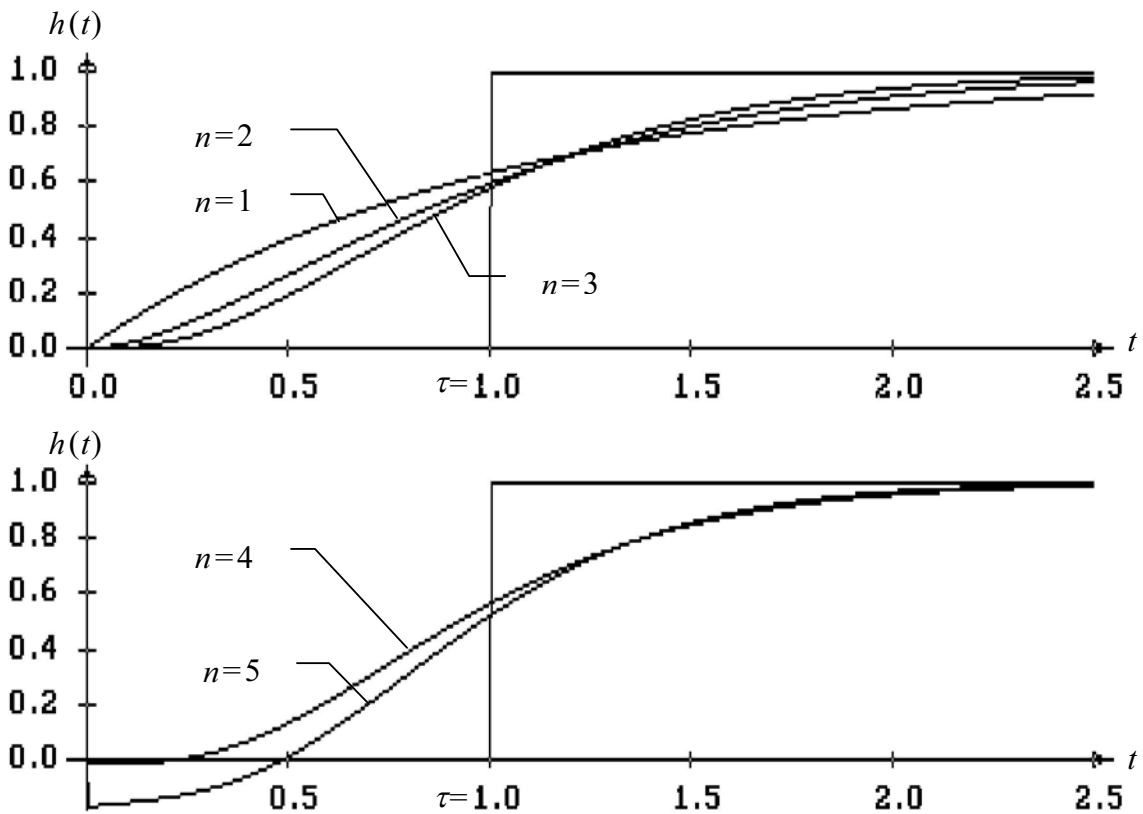


Рис.1.11. Перехідні характеристики для (1.85), розраховані аналітичним методом

При невеликих значеннях  $n$  графіки практично не відрізняються від аналогічних графіків на попередньому рисунку. Корені знаменника дробу (1.85) для деяких значень  $n$  наведені нижче. Для зручності і узагальнення корені подано у формі

$S = p\tau$ :

$$\begin{aligned}
 n = 1: & \quad S_1 = -1; \\
 n = 2: & \quad S_1 = -2; \\
 & \quad S_2 = -2; \\
 n = 3: & \quad S_1 = -3 + j 0.0005; \\
 & \quad S_2 = -3 - j 0.0005; \\
 & \quad S_3 = -3.0309; \\
 n = 4: & \quad S_1 = -3.9967 + j 0.000005; \\
 & \quad S_2 = -3.9967 - j 0.000005; \\
 & \quad S_3 = -4.0033 + j 0.0005; \\
 & \quad S_4 = -4.0033 - j 0.0005; \\
 n = 5: & \quad S_1 = -4.9917 + j 0.0246; \\
 & \quad S_2 = -4.9917 - j 0.0246; \\
 & \quad S_3 = -5.0212 + j 0.0156; \\
 & \quad S_4 = -5.0212 - j 0.0156; \\
 & \quad S_5 = -4.9741
 \end{aligned}$$

при значних  $n$  дається взнаки накопичення похибок розрахунку.

Ланку транспортного запізнювання можна апроксимувати ще й таким способом:

$$e^{-p\tau} = \frac{1}{e^{p\tau}} = \frac{1}{1 + p\tau + \frac{(p\tau)^2}{2!} + \frac{(p\tau)^3}{3!} + \dots}. \quad (1.87)$$

Обмежуючись тою чи іншою кількістю доданків у знаменнику, можна одержати ряд апроксимуючих структур

$$e^{-p\tau} \approx \frac{1}{1 + p\tau}; \quad (1.88)$$

$$e^{-p\tau} \approx \frac{1}{1 + p\tau + \frac{(p\tau)^2}{2}}; \quad (1.89)$$

$$e^{-p\tau} \approx \frac{1}{1 + p\tau + \frac{(p\tau)^2}{2} + \frac{(p\tau)^3}{6}} \quad (1.90)$$

і т.д.

Коефіцієнти полінома в знаменнику виразу (1.87) обчислюються підпрограмою MacLoren:

```

procedure MacLoren(Tau: real; n: integer; var Ba, Aa: Coef)
var S:integer;
    c:real;
begin
  Ba[-1]:=n;
  Ba[0]:=1;
  Aa[-1]:=1;
  Aa[0]:=1;
  c:=1;
  for S := 1 to n do begin
    c:=c*Tau/S;
    Aa[S]:=c
  end
end;

```

Графіки перехідних характеристик отримані шляхом чисельного інтегрування для структури (1.87);  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ . Корені знаменника (1.87) для ряду значень  $n$  наводимо нижче ( $S = p \tau$ ):

$n = 1:$        $S_1 = -1.0;$   
 $n = 2:$        $S_1 = -1.0 + j 1.0;$   
                   $S_2 = -1.0 - j 1.0;$   
 $n = 3:$        $S_1 = -0.6999 + j 1.8073;$   
                   $S_2 = -0.6999 - j 1.8073;$   
                   $S_3 = -1.5941;$   
 $n = 4:$        $S_1 = -0.2629 + j 2.5016;$   
                   $S_2 = -0.2629 - j 2.5016;$   
                   $S_3 = -1.7251 + j 0.8871;$   
                   $S_4 = -1.7251 - j 0.8871;$   
 $n = 5:$        $S_1 = 0.1968 + j 3.1131;$   
                   $S_2 = 0.1968 - j 3.1131;$   
                   $S_3 = -1.7043 + j 1.6861;$   
                   $S_4 = -1.7043 - j 1.68861;$   
                   $S_5 = -2.235.$

Графіки перехідних характеристик, що відповідають передаточним функціям (1.88) – (1.90) наводяться на рис.1.12, зверніть увагу, що за  $n = 5$  серед дійсних частин коренів є позитивні, тобто апроксимуюча залежність нестійка.

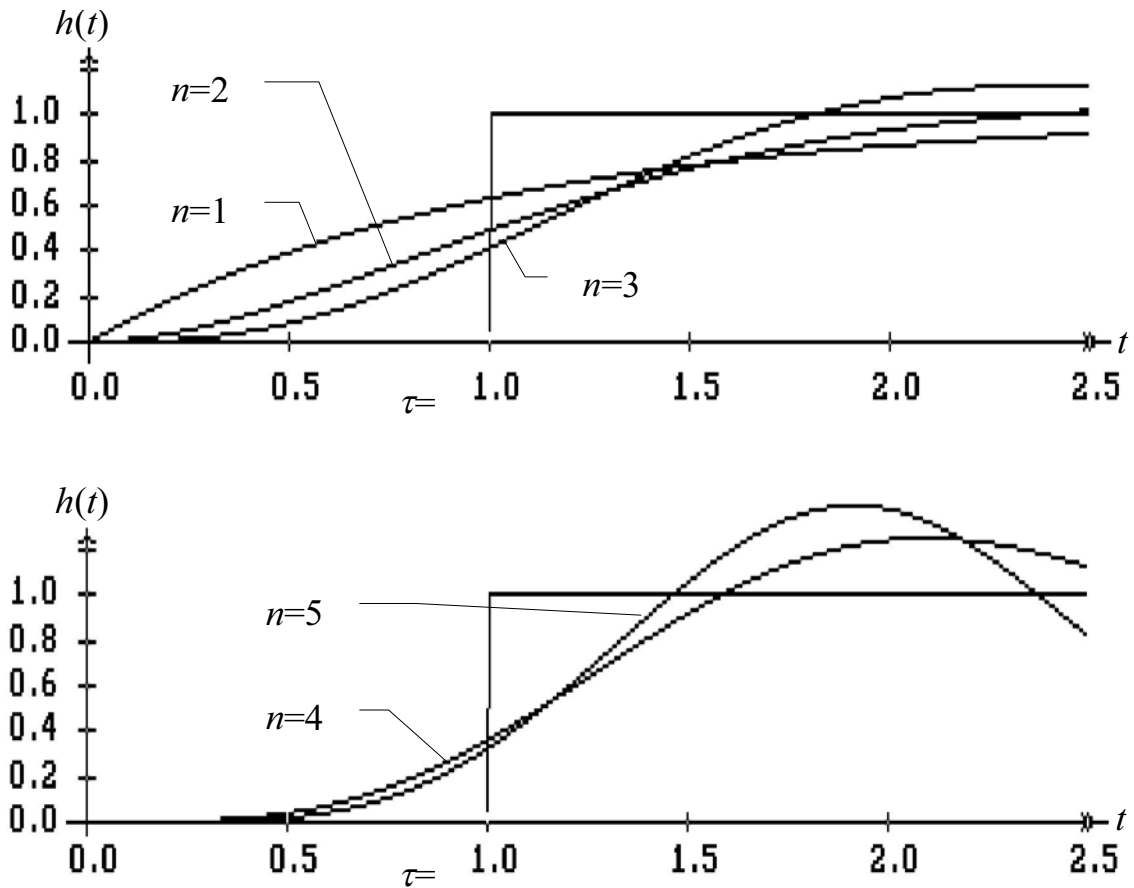


Рис.1.12. Перехідні характеристики, що відповідають передаточній функції (1.90), одержані аналітично

І, нарешті, розглянемо ще один із можливих варіантів апроксимації ланки транспортного запізнювання, а саме:

$$e^{-p\tau} \approx \left( \frac{1 - \frac{\tau}{2n} p}{1 + \frac{\tau}{2n} p} \right)^n. \quad (1.91)$$

В цьому випадку ланка транспортного запізнювання апроксимується ланцюжком послідовно з'єднаних однакових інтегро-диференціальних ланок. При  $n = 1$  формула (1.91) дає:

$$e^{-p\tau} \approx \frac{-\frac{\tau}{2} p + 1}{\frac{\tau}{2} p + 1}, \quad (1.92)$$

вона, як видно, нічим не відрізняється від (1.82).

$$\text{При } n = 2: \quad e^{-p\tau} \approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}p + \frac{\tau^2}{16}p^2}{1 + \frac{\tau}{2}p + \frac{\tau^2}{16}p^2}. \quad (1.93)$$

Формула (1.93) нагадує за структурою (1.83), але коефіцієнти при  $p^2$  відрізняються.

$$\text{При } n = 3: \quad e^{-p\tau} \approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}p + \frac{\tau^2}{12}p^2 - \frac{\tau^3}{216}p^3}{1 + \frac{\tau}{2}p + \frac{\tau^2}{12}p^2 + \frac{\tau^3}{216}p^3}. \quad (1.94)$$

Порівняння (1.94) з (1.84) показує відмінності у коефіцієнтах при  $p^2$  та  $p^3$ . Масиви коефіцієнтів поліномів у чисельнику та знаменнику передаточної функції (1.91) формує процедура ChainId.

```

procedure ChainId(Tau:real; n:integer; var Ba,Aa:Coef);
var S:integer;
    B,A:Coef;
    r:real;
begin
    r:=Tau/(2*n);
    B[-1]:=1; B[0]:=1; B[1]:=-r;
    A[-1]:=1; A[0]:=1; A[1]:=r;
    Ba[-1]:=0; Ba[0]:=1; Aa:=Ba;
    for S:=1 to n do
        begin
            UmmPol(Ba,B,Ba);
            UmmPol(Aa,A,Aa);
        end;
    end;
end;

```

Перехідні характеристики, що відповідають передаточним функціям (1.92) – (1.94), як легко показати, виражаються такими формулами:

$$n = 1: \quad h(t) = 1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (1.95)$$

$$n = 2: \quad h(t) = 1 - 16\frac{t}{\tau}e^{-4\frac{t}{\tau}}; \quad (1.96)$$

$$n = 3: \quad h(t) = 1 - e^{-6\frac{t}{\tau}} \left[ 1 - 12\frac{t}{\tau} + 72\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \right]. \quad (1.97)$$

На рис.1.13 показані перехідні характеристики, побудовані за формулами (1.95) – (1.97), та перехідні характеристики, що відповідають передаточній функції (1.91), розраховані аналітичним шляхом.

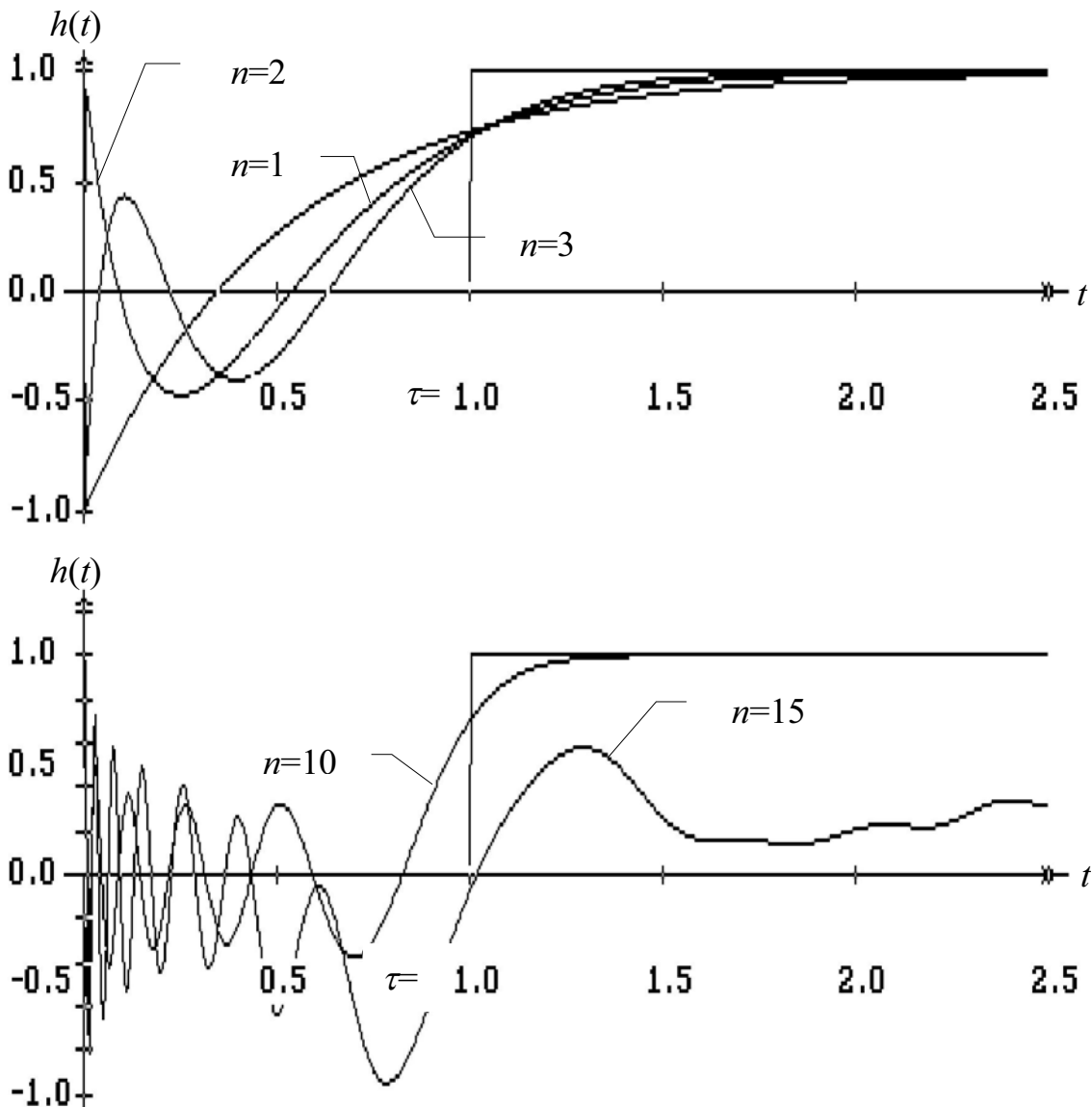


Рис.1.13. Перехідні характеристики, що відповідають передаточній функції (1.91)

Корені характеристичного полінома для деяких значень (1.91) наведені нижче.

$$\begin{aligned}
 n = 1: & \quad S_1 = -2.0; \\
 n = 2: & \quad S_1 = -4.0; \\
 & \quad S_2 = -4.0; \\
 n = 3: & \quad S_1 = -6.2984 + j 0.6062; \\
 & \quad S_2 = -6.2984 - j 0.6062; \\
 & \quad S_3 = -5.3944.
 \end{aligned}$$

Досі ми розглядали ланку транспортного запізнювання як таку. Коли досліджуваний об'єкт має передаточну функцію типу:

$$W_{об}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} e^{-p\tau}, \quad (1.98)$$

то, як уже згадувалось вище, наявність інерційних ланок, що відображується множителем  $\frac{B(p)}{A(p)}$  в (1.98), дозволяє при апроксимації  $e^{-p\tau}$  дробом Паде (1.81) чи ланцюжком однакових аперіодичних ланок (1.85), чи рядом Маклорена в знаменнику (1.89), чи ланцюжком однакових інтегро-диференціальних ланок (1.91), обмежуватись невеликими значеннями  $n$ , часто, навіть  $n = 1$  або  $n = 2$ . Рекомендуємо читачеві переконатись у сказаному самостійно, попрацювавши з програмою DeadTime, лістинг якої наводиться в дод.1.

## 2. АПРОКСИМАЦІЯ ЗА РЕАКЦІЄЮ НА ВІДОМИЙ ВХІДНИЙ СИГНАЛ

### 2.1. Апроксимація однією з елементарних динамічних ланок за перехідною характеристикою [38, 42]

#### 2.1.1. Безінерційна ланка

$$W(p) = k; \quad (2.1)$$

$$h(t) = k \cdot 1(t). \quad (2.2)$$

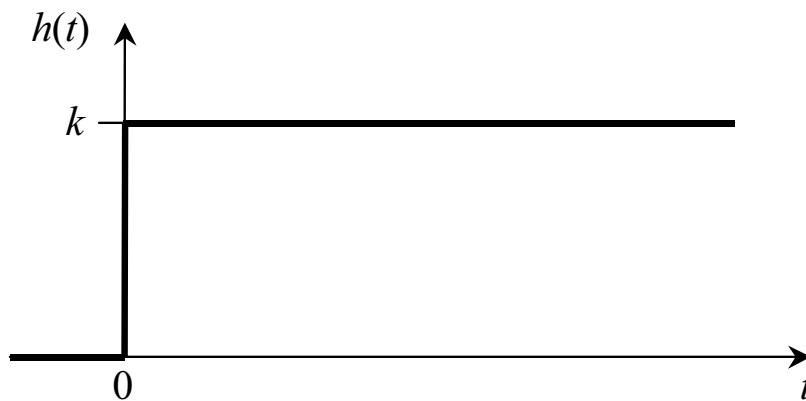


Рис.2.1. Перехідна характеристика безінерційної ланки

Як видно з рис.2.1:  $k = h(t) \Big|_{t>0}$ . (2.3)

#### 2.1.2. Інтегральна ланка

$$W(p) = \frac{k}{p}; \quad (2.4)$$

$$h(t) = kt \cdot 1(t). \quad (2.5)$$

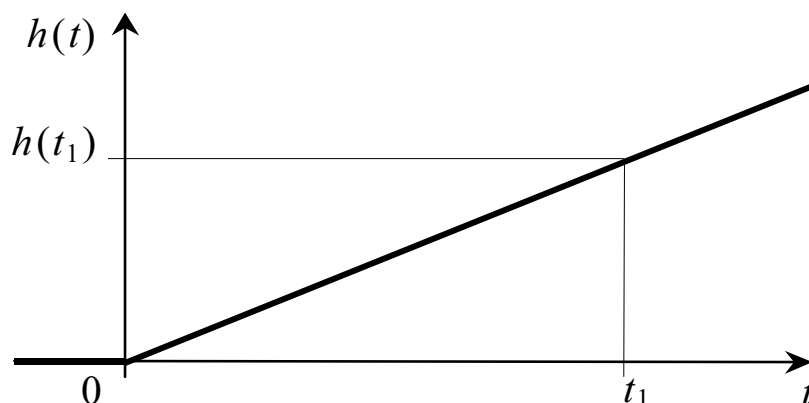


Рис.2.2. Перехідна характеристика інтегральної ланки

З рис.2.2 випливає, що:  $k = \frac{h(t_1)}{t_1} \Big|_{t_1 > 0}$ . (2.6)

### 2.1.3. Ідеальна диференціальна ланка

$$W(p) = k p; \quad (2.7)$$

$$h(t) = k \delta(t). \quad (2.8)$$

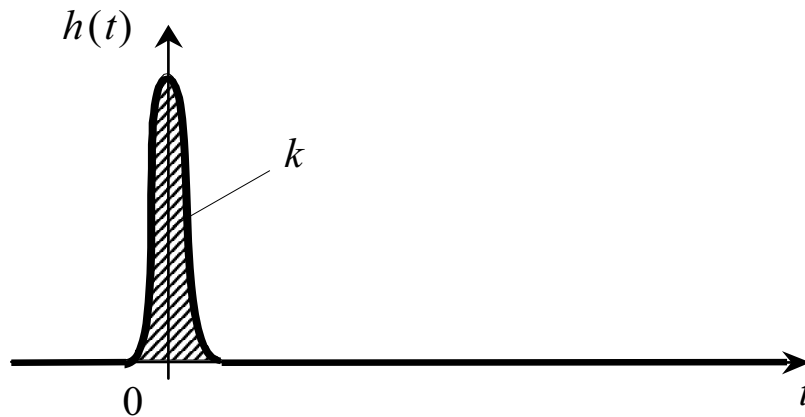


Рис.2.3. Перехідна характеристика ідеальної диференціальної ланки

З рис.2.3. видно, що:  $k = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$ . (2.9)

### 2.1.4. Реальна диференціальна ланка

$$W(p) = k \frac{T p}{T p + 1}; \quad (2.10)$$

$$h(t) = k e^{-\frac{t}{T}}. \quad (2.11)$$

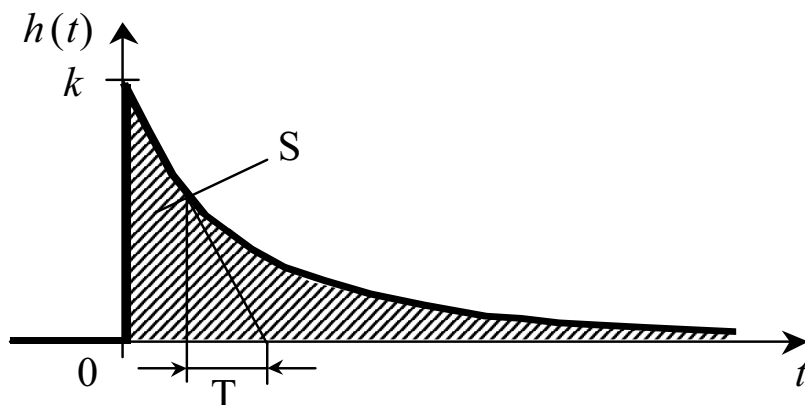


Рис.2.4. Перехідна характеристика реальної диференціальної ланки

Як легко побачити з рис.2.4,  $k = \lim_{t \rightarrow 0+} h(t)$ . (2.12)

Сталу часу  $T$  можна визначити як піддотичну до  $h(t)$ , але точніше її можна обчислити через заштриховану на рис.2.4 площу:

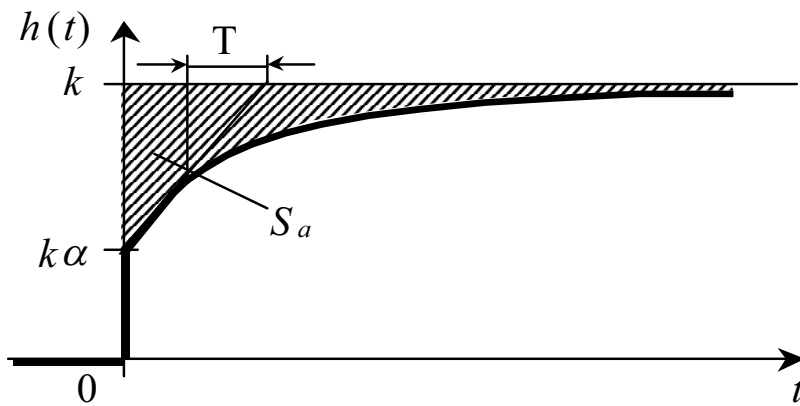
$$S = \int_0^{\infty} h(t) dt = k \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} dt = kT,$$

звідки  $T = \frac{S}{k}$ . (2.13)

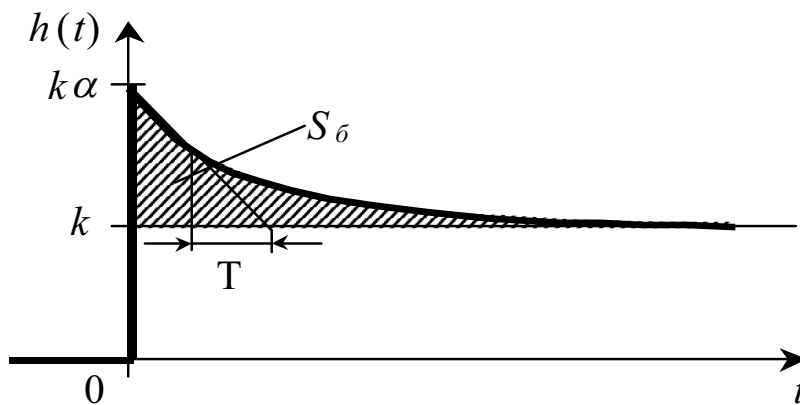
### 2.1.5. Інтегро-диференціальна ланка

$$W(p) = k \frac{\alpha T p + 1}{T p + 1}; \quad (2.14)$$

$$h(t) = k \left[ 1 - (1 - \alpha) e^{-\frac{t}{T}} \right]. \quad (2.15)$$



а)  $\alpha < 1$



б)  $\alpha > 1$

Рис.2.5. Перехідна характеристика інтегро-диференціальної ланки

З рис.2.5 видно, що  $k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ . (2.16)

$$\alpha = \frac{\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t)}{k}. \quad (2.17)$$

$T$  можна визначити як піддотичну, але більшу точність можна одержати, обчислюючи заштриховані площі рис.2.5:

$$S_a = \int_0^{\infty} [k - h(t)] dt = k(1 - \alpha) \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} dt,$$

тобто  $S_a = kT(1 - \alpha),$

звідки  $T = \frac{S_a}{k(1 - \alpha)}. \quad (2.18)$

Відповідно:  $S_b = \int_0^{\infty} [h(t) - k] dt = k(\alpha - 1) \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} dt,$

тобто  $S_b = kT(\alpha - 1),$

звідки  $T = \frac{S_b}{k(\alpha - 1)}. \quad (2.19)$

## 2.1.6. Аперіодична ланка першого порядку

$$W(p) = \frac{k}{T p + 1}; \quad (2.20)$$

$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (2.21)$$

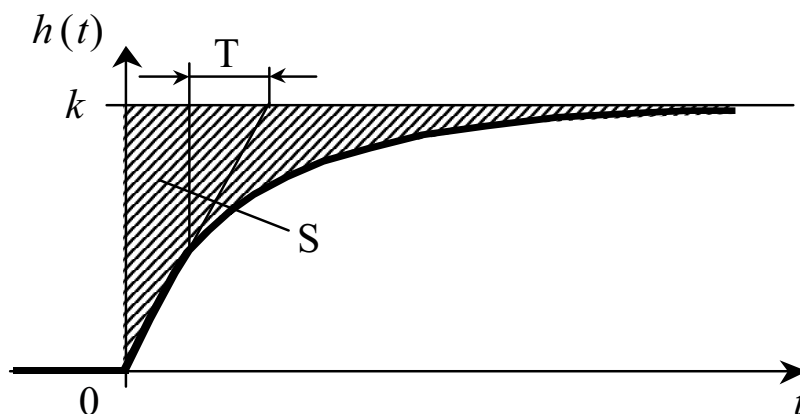


Рис.2.6. Перехідна характеристика аперіодичної ланки першого порядку

З рис.2.6. видно, що  $k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ . (2.22)

$T$  можна визначити як піддотичну або ж обчислюючи заштриховану площу:

$$S = \int_0^{\infty} [k - h(t)] dt = k \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} dt,$$

або  $S = kT,$

звідки  $T = \frac{S}{k}$ . (2.23)

### 2.1.7. Аперіодична ланка другого порядку

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (2.24)$$

Розглянемо спочатку випадок, коли  $T_1 \neq T_2$ . Тоді:

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2} \right]. \quad (2.25)$$

Обчислимо значення  $S(t)$ :

$$S(t) = \int_0^t [k - h(t)] dt = \frac{k}{T_1 - T_2} \int_0^t \left( T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right) dt.$$

Беручи інтеграл, маємо:

$$S(t) = k(T_1 + T_2) - \frac{k}{T_1 - T_2} \left( T_1^2 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2^2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right). \quad (2.26)$$

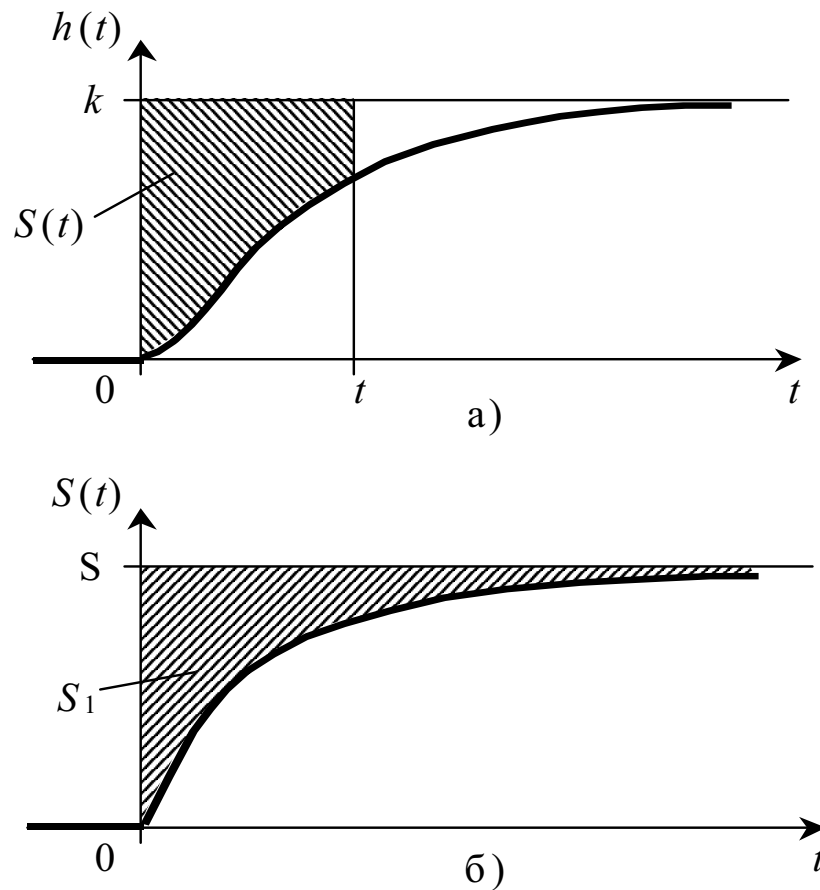


Рис.2.7. Перехідна характеристика за формулою (2.25) та функція (2.26)

Як видно з рис.2.7, а:  $k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ . (2.27)

З (2.26) видно, що  $S = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = k(T_1 + T_2)$ . (2.28)

Інтегруючи функцію  $S - S(t)$ , матимемо:

$$S_1 = \int_0^{\infty} [S - S(t)] dt = \frac{k}{T_1 - T_2} \int_0^{\infty} \left( T_1^2 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2^2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right) dt,$$

або

$$S_1 = \frac{k}{T_1 - T_2} (T_1^3 - T_2^3),$$

або, ще простіше:

$$S_1 = k(T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2). \quad (2.29)$$

Рівняння (2.28), (2.29) утворюють систему:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = S^*, \\ T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2 = S_1^*, \end{cases}$$

де  $S^* = \frac{S}{k}$ ;  $S_1^* = \frac{S_1}{k}$ .

Розв'яжемо одержану систему, скажімо, відносно  $T_1$ :

$$T_{1(1,2)} = \frac{S^* \pm \sqrt{(S^*)^2 - 4[(S^*)^2 - S_1^*]}}{2}. \quad (2.30)$$

Легко бачити, що сума двох варіантів розв'язку (2.30):  $T_{1(1)} + T_{1(2)} = S^*$ , що відповідає формулі (2.28).

Отже, один з варіантів розв'язку (2.30) можна розглядати як  $T_1$ , а інший - як  $T_2$ , наприклад, так:

$$T_1 = \frac{S^* + \sqrt{(S^*)^2 - 4[(S^*)^2 - S_1^*]}}{2}; \quad (2.31)$$

$$T_2 = \frac{S^* - \sqrt{(S^*)^2 - 4[(S^*)^2 - S_1^*]}}{2}. \quad (2.32)$$

А тепер розглянемо варіант, коли в (2.24)  $T_1 = T_2$ . Тоді:

$$h(t) = k \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{T_1} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \right]. \quad (2.33)$$

Інтеграл: 
$$S = \int_0^{\infty} [k - h(t)] dt = k \int_0^{\infty} \left( 1 + \frac{t}{T_1} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} dt,$$

або 
$$S = 2kT_1,$$

звідки 
$$T_1 = \frac{S}{2k}. \quad (2.34)$$

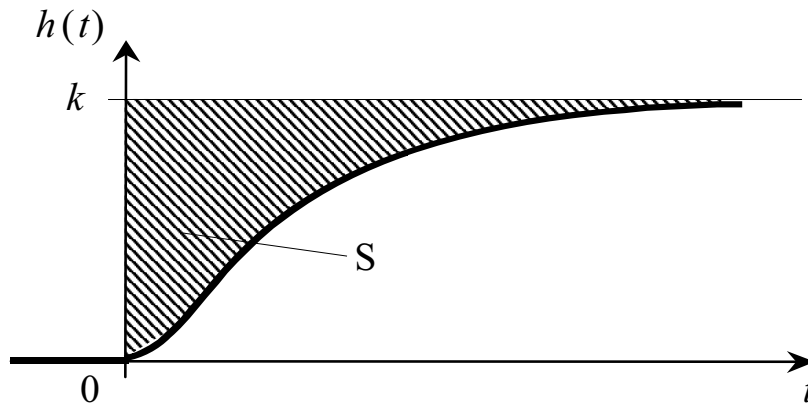


Рис.2.8. Перехідна характеристика аперіодичної ланки другого порядку, формула (2.33)

Коефіцієнт передачі  $k$  визначається за формулою (2.27), як і в попередньому варіанті.

### 2.1.8. Коливальна ланка

$$W(p) = \frac{k}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad (2.35)$$

за умови, що  $a_1^2 - 4a_2 < 0$ , тобто коли корені знаменника (2.35):

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \quad (2.36)$$

$$\text{де } a = \frac{-a_1}{2a_2}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2a_2}.$$

$$\text{В такому випадку: } h(t) = k \left[ 1 - \left( \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) e^{\alpha t} \right]. \quad (2.37)$$

Оскільки  $\alpha < 0$ , то очевидно  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = k$ ,

$$\text{звідки } k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t). \quad (2.38)$$

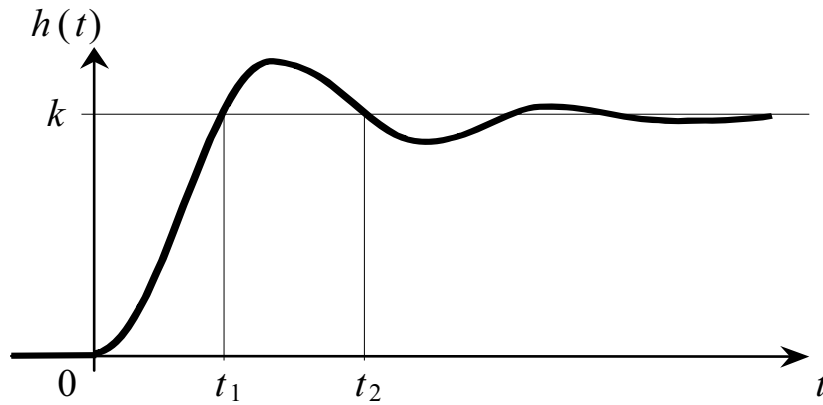


Рис.2.9. Перехідна характеристика коливальної ланки

Розглянемо (2.37) при  $t = t_1$ , коли  $h(t) = k$ . Одержимо:

$$\cos \beta t_1 - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t_1 = 0,$$

або, що те саме:

$$\operatorname{tg} \beta t_1 = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.39)$$

Аналогічно для  $t_2$  (див. рис.2.9)

$$\operatorname{tg} \beta t_2 = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.40)$$

Порівнюючи (2.39) з (2.40), доходимо висновку, що  $\beta t_1 + \pi = \beta t_2$ , звідки:

$$\beta = \frac{\pi}{t_2 - t_1}. \quad (2.41)$$

Підставляємо одержане значення  $\beta$  в (2.39), будемо мати:

$$\alpha = \frac{\beta}{\operatorname{tg} \beta t_1}. \quad (2.42)$$

Маючи значення  $\alpha$  та  $\beta$ , легко перерахувати їх в  $a_2$  та  $a_1$  – коефіцієнти передаточної функції (2.35), використовуючи формулу (2.36):

$$\begin{cases} -\frac{a_1}{2a_2} = \alpha, \\ \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2a_2} = \beta. \end{cases}$$

Підставляємо  $a_1$  з першого рівняння в друге, підносимо друге рівняння в квадрат:

$$4a_2 - 4a_2^2\alpha^2 = 4a_2^2\beta^2,$$

та ділимо його на  $4a_2$ :  $1 - a_2\alpha^2 = a_2\beta^2$ ,

звідки 
$$a_2 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (2.43)$$

Підставляючи одержане значення  $a_2$  в перше рівняння системи, одержуємо

остаточно: 
$$a_1 = \frac{-2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = -2a_2\alpha. \quad (2.44)$$

### 2.1.9. Консервативна ланка

$$W(p) = \frac{k}{a_2 p^2 + 1}; \quad (2.45)$$

$$h(t) = k \left( 1 - \cos \frac{t}{\sqrt{a_2}} \right). \quad (2.46)$$

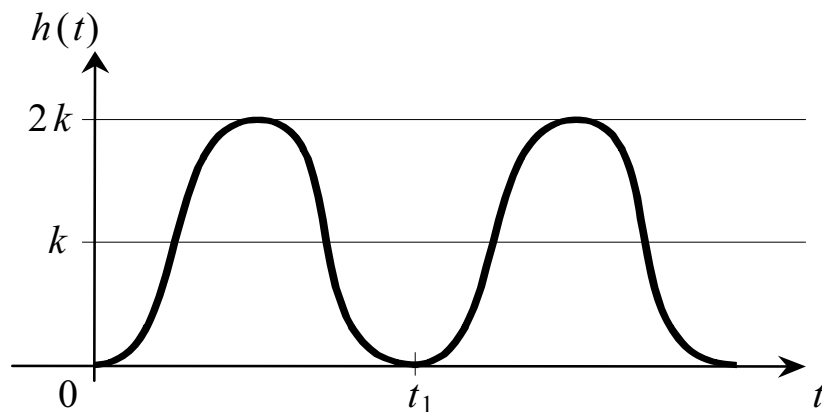


Рис.2.10. Перехідна характеристика консервативної ланки

З рис.2.10 видно, що:

$$k = \frac{\max h(t)}{2}. \quad (2.47)$$

Для моменту часу  $t_1$  (коли  $h(t_1) = 0$ ) з (2.46) маємо:

$$1 - \cos \frac{t_1}{\sqrt{a_2}} = 0,$$

звідки 
$$\frac{t_1}{\sqrt{a_2}} = 2\pi,$$

отже, 
$$a_2 = \left( \frac{t_1}{2\pi} \right)^2. \quad (2.48)$$

## 2.1.10. Ланка транспортного запізнювання

$$W(p) = e^{-p\tau}; \quad (2.49)$$

$$h(t) = 1(t - \tau). \quad (2.50)$$

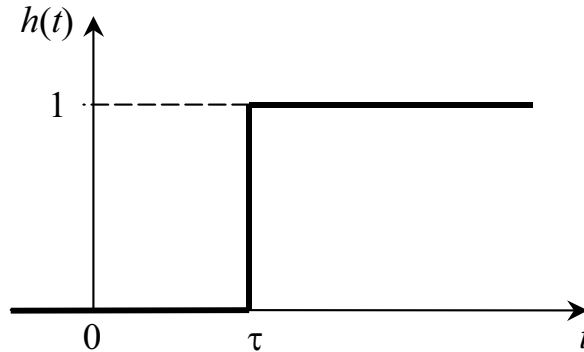


Рис.2.11. Перехідна характеристика ланки транспортного запізнювання

Час  $\tau$  визначається так, як показано на рис.2.11.

## 2.2. Апроксимація методом площ

### 2.2.1. Ідея методу та елементарні приклади

Метод базується на тому, що апроксимуюча передаточна функція  $W(p)$  подається у вигляді степеневого ряду [17, 31]:

$$W_a(p) = k_a \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s A_s p^s. \quad (2.51)$$

Передаточна функція каналу, який апроксимується, в свою чергу, також розкладається в аналогічний ряд:

$$W(p) = k \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s C_s p^s. \quad (2.52)$$

Вважаємо, що коефіцієнти ряду (2.52) є відомими (способи їх визначення ми розглянемо далі). Коефіцієнти ряду (2.51) подаються як деякі функції коефіцієнтів апроксимуючої функції  $W_a(p)$ . Структура  $W_a(p)$  вважається відомою чи заданою, і її коефіцієнти входять у формули для  $A_s$ . Якщо  $W_a(p)$  має  $n$  змінюваних

коефіцієнтів ( $n$  ступенів свободи), то порівнюючи перші члени рядів (2.51) та (2.52), можна записати систему рівнянь.

$$\begin{cases} K_a = K, \\ A_s = C_s, \quad 1 \leq s \leq n-1. \end{cases} \quad (2.53)$$

Система (2.53) розв'язується відносно невідомих коефіцієнтів апроксимуючої передаточної функції (2.51). Коефіцієнт  $K_a$  визначається з першого рівняння системи (2.53). Для прикладу розглянемо кілька елементарних апроксимуючих структур:

$$W_{a1}(p) = k \frac{1}{Tp + 1}. \quad (2.54)$$

Ділимо чисельник (2.54) на знаменник:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 + T p \\ - 1 + T p & 1 - T p + \dots \\ \hline - T p & \\ - T p - T^2 p^2 & \\ \hline & \dots \end{array}$$

Система (2.53) при  $S=1$  дає:

$$T = C_1. \quad (2.55)$$

Нехай тепер  $W_{a2}(p) = k \frac{1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (2.56)$

Розкриємо дужки в знаменнику і ділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2 \\ - 1 + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2 & 1 - \underbrace{(T_1 + T_2)p}_{C_1} + \underbrace{(C_1^2 - T_1 T_2)p^2}_{C_2} - \dots \\ \hline - (T_1 + T_2)p - T_1 T_2 p^2 - \dots & \\ - C_1 p - C_1 p^2 - C_1 T_1 T_2 p^3 & \\ \hline (C_1^2 - T_1 T_2)p^2 + C_1 T_1 T_2 p^3 + \dots & \end{array}$$

Система (2.53) при  $n=1$  та  $n=2$  дає:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = C_1, \\ C_1^2 - T_1 T_2 = C_2. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи:

$$T_1 = \frac{C_1 + \sqrt{5C_1^2 - 4C_2}}{2}; \quad (2.57)$$

$$T_2 = \frac{C_1 - \sqrt{5C_1^2 - 4C_2}}{2}. \quad (2.58)$$

Як наступну структуру (2.51) розглянемо:

$$W_{a_3}(p) = k_a \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}. \quad (2.59)$$

Ділимо чисельник (2.59) на його знаменник:

$$\begin{array}{r} 1 \\ - \\ 1 + a_1 p + a_2 p^2 \\ - \\ -a_1 p - a_2 p^2 \\ - \\ -C_1 p - a_1 C_2 p^2 - C_1 a_2 p^3 \\ \hline (a_1 C_1 - a_2)^2 + C_1 a_2 p^3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 1 + a_1 p + a_2 p^2 \\ \hline 1 - \underbrace{a_1 p}_{C_1} + \underbrace{(a_1 C_1 - a_2)}_{C_2} p^2 - \dots \end{array} \right.$$

Рівняння (2.53) при  $n=1, n=2$ :

$$\begin{cases} a_1 = C_1, \\ a_1 C_1 - a_2 = C_2. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи:

$$a_1 = C_1; \quad (2.60)$$

$$a_2 = a_1 C_1 - C_2. \quad (2.61)$$

Нехай тепер апроксимуючою структурою є:

$$W_{a_4}(p) = k \frac{1}{(Tp + 1)^n}. \quad (2.62)$$

Ділимо чисельник (2.62) на знаменник:

$$\begin{array}{r} 1 \\ - \\ 1 + nTp + \frac{n(n-1)}{2} T^2 p^2 + \dots \\ \hline -nTp - \frac{n(n-1)}{2} T^2 p^2 - \dots \\ - \\ -C_1 - C_1^2 p^2 - C_1 \frac{n(n-1)}{2} T^2 p^3 \\ \hline \left[ C_1^2 - \frac{n(n-1)}{2} T^2 \right] p^2 + C_1 \frac{n(n-1)}{2} T^2 p^3 + \dots \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 1 + nTp + \frac{n(n-1)}{2} T^2 p^2 + \dots \\ \hline 1 - \underbrace{nT}_{C_1} p + \underbrace{\left[ C_1^2 - \frac{n(n-1)}{2} T^2 \right]}_{C_2} p^2 - \dots \end{array} \right.$$

Рівняння (2.53) при  $n=1, n=2$ :

$$\begin{cases} nT = C_1, \\ C_1^2 - \frac{n(n-1)}{2}T^2 = C_2. \end{cases}$$

Розв'язок даної системи:  $n = \frac{1}{1-2b}$ ,

де  $b = \frac{C_2}{C_1^2} - 1$ .

Але ж  $n$  має бути цілим, отже:

$$n = \text{round}\left(\frac{1}{1-2b}\right) \quad (2.63)$$

і тоді  $T = \frac{C_1}{n}$ . (2.64)

І, нарешті, розглянемо:  $W_{a_5}(p) = k \frac{b_1p+1}{a_2p^2+a_1p+1}$ . (2.65)

Ділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r} \frac{1+b_1p}{1+a_1p+a_2p^2} \quad \left| \frac{1+a_1p+a_2p^2}{1-\underbrace{(a_1-b_1)}_{C_1}p + \underbrace{(C_1a_1-a_2)}_{C_2}p^2 - \underbrace{(C_2a_1-C_1a_2)}_{C_3}p^3 + \dots} \right. \\ \hline - (a_1-b_1)p - a_2p^2 \\ - C_1p - C_1a_1p^2 - C_1a_2p^3 \\ \hline - (C_1a_1-a_2)p^2 + C_2a_1p^3 \\ - C_2p^2 + C_2a_1p^3 + C_2a_2p^4 \\ \hline - (C_2a_1-C_1a_2)p^3 - C_2a_2p^4 - \dots \end{array}$$

Система (2.53) при  $n=1, n=2, n=3$  дає:  $\begin{cases} a_1 - b_1 = C_1, \\ C_1a_1 - a_2 = C_2, \\ C_2a_1 - C_1a_2 = C_3. \end{cases}$

Дана система розкладається на дві, друге та третє рівняння можуть бути розв'язані відносно  $a_1$  та  $a_2$ :

$$a_1 = \frac{\begin{bmatrix} C_2 & -1 \\ C_3 & -C_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} C_1 & -1 \\ C_2 & -C_1 \end{bmatrix}} = \frac{C_3 - C_1C_2}{C_2 - C_1^2}; \quad (2.66)$$

$$a_2 = C_1 a_1 - C_2; \quad (2.67)$$

$$b_1 = a_1 - C_1. \quad (2.68)$$

## 2.2.2. Геометричний смисл коефіцієнтів $C_s$

У попередньому розділі ми вважали коефіцієнти  $C_s$  об'єкта, що апроксимується, відомими. Насправді це не так. Звідки їх взяти? Один із варіантів визначення  $A_s$  розглянемо в цьому розділі. Нехай, наприклад, відомий графік перехідної характеристики досліджуваного об'єкта (каналу).

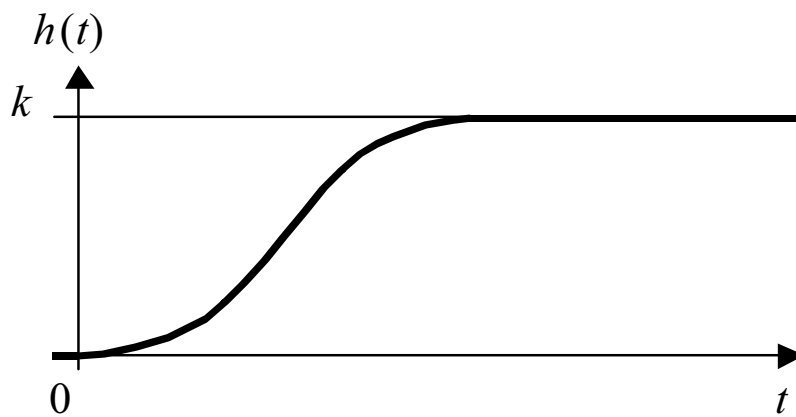


Рис.2.12. Перехідна характеристика каналу (2.52)

Коефіцієнт передачі структури (2.51) береться рівним  $k$  з рис.2.12:

$$k_a = k. \quad (2.69)$$

Після цього графік рис.2.12 можна нормувати, тобто поділити на  $k$ :

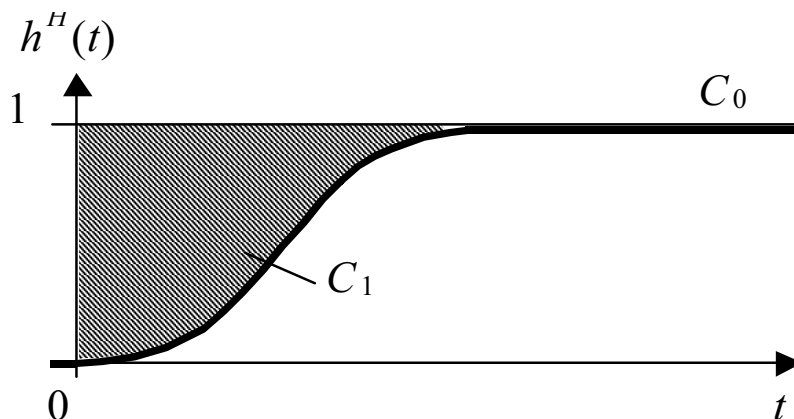


Рис.2.13. Нормована перехідна характеристика каналу (2.52)

При цьому замість структури (2.52) досить розглянути:

$$W^H(p) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s C_s p^s. \quad (2.70)$$

Представимо ліву частину (2.70) рядом Маклорена:

$$W^H(p) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left. \frac{d^s W^H(p)}{dp^s} \right|_{p=0} p^s. \quad (2.71)$$

Порівнюючи ряди (2.70) та (2.71), бачимо, що:

$$C_s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left. \frac{d^s W^H(p)}{dp^s} \right|_{p=0} (-1)^s. \quad (2.72)$$

При  $S=0$ :  $C_0 = W^H(p) \Big|_{p=0} = 1.$

Для визначення геометричного смислу  $C_1$  розглянемо очевидну рівність:

$$\int_0^{\infty} [1 - h^H(t)] e^{-pt} dt = \frac{1}{p} - \frac{W^H(p)}{p}.$$

Розглядаючи останній вираз при  $p \rightarrow 0$ , одержимо:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - W^H(p)}{p} = \int_0^{\infty} [1 - h^H(t)] dt.$$

Невизначеність у лівій частині розкриваємо за правилом Лопіталя:

$$-\left. \frac{dW^H(p)}{dp} \right|_{p=0} = \int_0^{\infty} [1 - h^H(t)] dt.$$

Але згідно з (2.72) ліва частина останнього співвідношення є  $C_1$ , отже:

$$C_1 = \int_0^{\infty} [1 - h^H(t)] dt, \quad (2.73)$$

тобто  $C_1$  є площа, заштрихована на рис.2.13. Щоб виявити геометричний смисл  $C_2$ , введемо у розгляд функцію:

$$C_1(t) = \int_0^t [1 - h^H(t)] dt. \quad (2.74)$$

Тоді матиме місце очевидна рівність:

$$\int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] e^{-pt} dt = \frac{C_1}{p} - L[C_1(t)].$$

Але ж 
$$L[C_1(t)] = \frac{1 - \frac{W(p)}{p}}{p}.$$

Отже, 
$$\frac{C_1 p - 1 + W(p)}{p^2} = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] e^{-pt} dt.$$

Розглянемо останнє співвідношення при  $p \rightarrow 0$  та розкриємо невизначеність у лівій частині, двічі застосовуючи правило Лопіталя, одержуємо:

$$\left. \frac{d^2 W(p)}{2! dp^2} \right|_{p=0} = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] dt.$$

Згідно з (2.72) ліва частина останнього співвідношення дорівнює  $C_2$ , отже

$$C_2 = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] dt. \quad (2.75)$$

На рис.2.14  $C_2$  дорівнює заштрихованій площі.

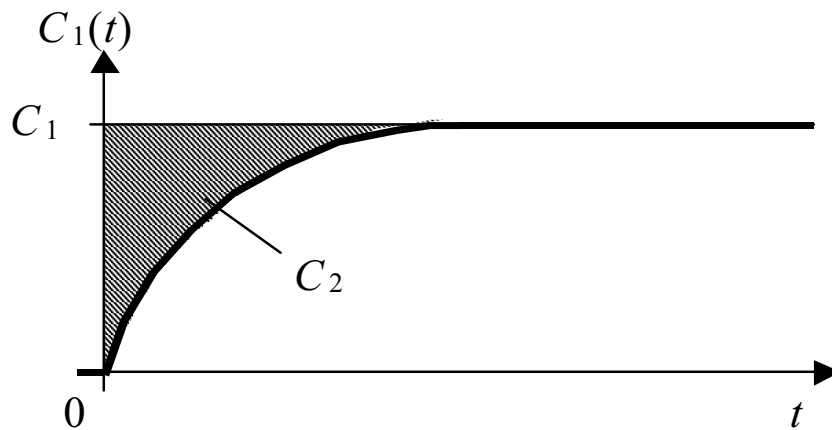


Рис.2.14 Графік функції (2.74)

Якщо ввести в розгляд функцію

$$C_2(t) = \int_0^t [C_1 - C_1(t)] dt, \quad (2.76)$$

то аналогічно тому, як це було зроблено вище, можна показати, що

$$C_3 = \int_0^{\infty} [C_2 - C_2(t)] dt. \quad (2.77)$$

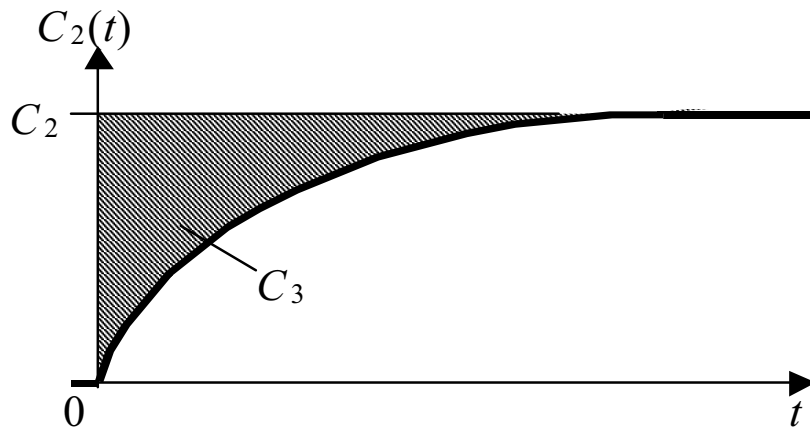


Рис.2.15 Графік функції (2.76)

І в загальному випадку 
$$C_n = \int_0^{\infty} [C_{n-1} - C_{n-1}(t)] dt, \quad (2.78)$$

де 
$$C_k(t) = \int_0^t [C_{k-1} - C_{k-1}(t)] dt. \quad (2.79)$$

Якщо функція  $h^H(t)$  задана масивом ординат Mhn: CoefL такої структури

	-1	0	1	2		L	L+1
Mhn	L	$h_0^H$	$h_1^H$	$h_2^H$		$h_L^H$	Dt

то обчислення коефіцієнтів  $C_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  можна оформити у вигляді підпрограми:

```

procedure Cs (H:Coefl; n:integer; var C:Coef);
var z,s,L:integer, Cp, Hp, Dt:real;
begin
  L:=round(H[-1]); Dt:=H[L+1]
  C[-1]:=n; C[0]:=1;
  For s:=1 to n do
    begin
      Cp:=C[s-1];
      For z:=1 to L do
        Begin
          Hp:=H[z]
          H[z]:= Hp+(Cp-(Hp+ H[z])/2)*Dt
        End
      C[s]:= H[L]
    End
  End.

```

Можна запропонувати і дещо іншу геометричну інтерпретацію коефіцієнтів  $C_s$ .

Перетворимо вираз (2.73) таким чином:

$$C_1 = \int_0^{\infty} [1 - h^H(t)] dt = \int_0^t [1 - h^H(t)] dt + \int_t^{\infty} [1 - h^H(t)] dt,$$

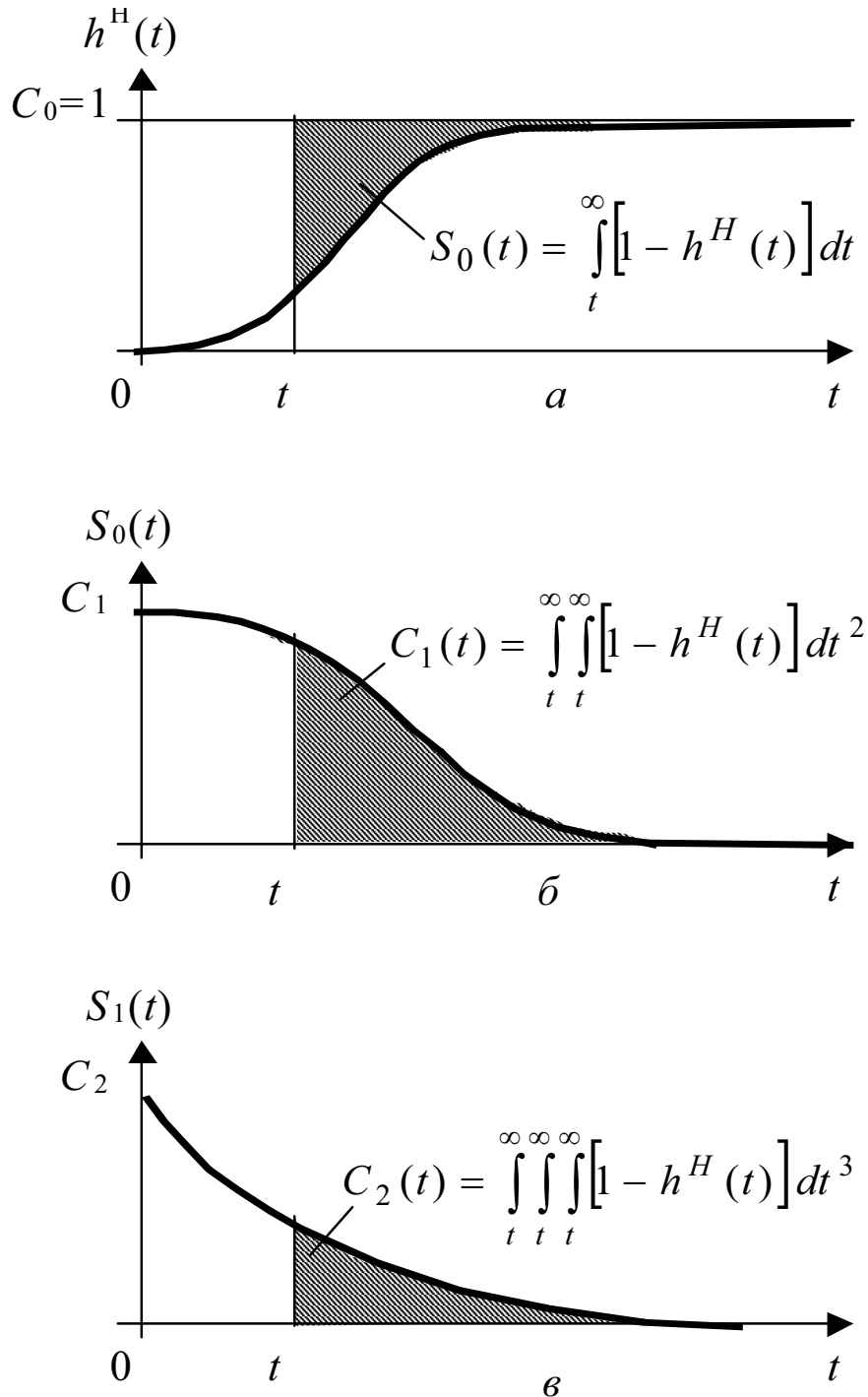
звідси 
$$C_1 - C_1(t) = \int_t^{\infty} [1 - h^H(t)] dt.$$

Інтегруємо цей вираз у межах від 0 до  $\infty$ , і згідно з (2.72) маємо:

$$C_2 = \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} [1 - h^H(t)] dt^2. \quad (2.80)$$

Аналогічно одержуємо: 
$$A_3 = \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} \int_t^{\infty} [1 - h^H(t)] dt^3, \quad (2.81)$$

і в загальному випадку 
$$A_n = \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} \dots \int_t^{\infty} [1 - h^H(t)] dt^n. \quad (2.82)$$

Рис.2.16. Геометричний смисл коефіцієнтів  $C_s$ 

Наведені залежності дозволяють, зокрема, обчислювати коефіцієнти  $C_s$  тоді, коли, наприклад, перехідна характеристика одержана експериментально чи будь-яким іншим шляхом. Відомо, що перехідну характеристику можна обчислити, виходячи з частотних характеристик. У випадку об'єкта з розподіленими параметрами перехідну характеристику можна одержати шляхом чисельного інтегрування системи диференціальних рівнянь у частинних похідних (моделі

об'єкта). Це дає можливість апроксимації складних у динамічному плані математичних моделей більш простими і зручними у використанні.

### 2.2.3 Визначення коефіцієнтів $C_S$ для елементарних об'єктів з розподіленими параметрами

Виявляється, що для відносно нескладних об'єктів з розподіленими параметрами коефіцієнти  $C_S$  можна визначити безпосередньо із системи відповідних диференціальних рівнянь, не проводячи перед цим її інтегрування. Суть даного методу полягає в наступному.

1. Система диференціальних рівнянь з відповідними граничними умовами записується у приростах змінних відносно їх значень в усталеному режимі, взятому за базовий. Якщо усі або деякі з цих рівнянь виявляються нелінійними, то при цьому виконується їх лінеаризація в околі заданого базового режиму. Серед можливих вхідних сигналів ненульовий приріст надається лише сигналу, що поступає на вхід каналу, який в даний момент цікавить дослідника.
2. Над системою диференціальних рівнянь та граничних умов виконується перетворення Лапласа (початкові умови вважаються нульовими).
3. Усі члени одержаної системи діляться на зображення згаданого вхідного сигналу. Відношення зображень вихідних змінних системи до зображення вхідного розглядаються як передаточні функції каналів, спільним входом яких є згаданий вхідний сигнал, а виходом – відповідна змінна системи. Отже, система рівнянь відносно змінних перетворюється на систему відносно передаточних функцій.
4. Одержану систему рівнянь послідовно  $n$  разів диференціюємо відносно  $p$  та розглянемо її при  $p=0$ . З урахуванням (2.69) одержуємо систему відносно  $C_S$ .
5. Розв'язуємо одержану систему відносно  $C_S$  при  $n=0$ ,  $n=1$  та далі, поки не визначимо структуру  $C_S$  для довільного  $S$ .
6. Підставляючи знайдену структуру для  $C_S$  в систему п.5, одержуємо рекурентні формули для обчислення  $C_S$ .

Як приклад розглянутого алгоритму знайдемо коефіцієнти  $C_S$  для динаміки плоскої стінки (раніше розглядалося у розд.1.1). Математична модель в зображеннях за Лапласом (див. рівняння (1.3), (1.4))

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{\theta} = 0, \\ \frac{-\lambda}{\alpha_0} \frac{d\bar{\theta}}{dx} \Big|_{x=0} + \bar{\theta} \Big|_{x=0} = \bar{\theta}^{S,L}, \\ \frac{d\bar{\theta}}{dx} \Big|_{x=\delta} = 0. \end{cases} \quad (2.83)$$

Ділимо усі члени одержаної системи на  $\bar{\theta}^{S,L}$  і позначаємо:

$$W(p, x) = \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}^{S,L}}. \quad (2.84)$$

Система набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{d^2 W(p, x)}{dx^2} - \frac{p}{a} W(p, x) = 0, \\ \frac{-\lambda}{\alpha_0} \frac{dW(p, x)}{dx} \Big|_{x=0} + W(p, x) \Big|_{x=0} = 1, \\ \frac{dW(p, x)}{dx} \Big|_{x=\delta} = 0. \end{cases} \quad (2.85)$$

При  $p=0$ :  $W(p, x) \Big|_{p=0} = C_0(x).$

Розглядаючи (2.85) при  $p=0$ , одержуємо:

$$\begin{cases} \frac{d^2 C_0(x)}{dx^2} = 0, \\ \frac{-\lambda}{\alpha_0} \frac{dC_0(x)}{dx} \Big|_{x=0} + C_0(x) \Big|_{x=0} = 1, \\ \frac{dC_0(x)}{dx} \Big|_{x=\delta} = 0. \end{cases} \quad (2.86)$$

Розв'язок першого рівняння системи (2.86) має вигляд:

$$C_0(x) = D_0 x + D_1. \quad (2.87)$$

Підставляємо розв'язок (2.87) першого рівняння системи (2.86) в наступні два рівняння цієї ж системи:

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} D_0 + D_1 = 1, \\ D_0 = 0, \end{cases}$$

звідки  $D_0 = 0, D_1 = 1.$  (2.88)

Диференціюємо (2.85) S разів:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{d^S W(p, x)}{dp^S} \right] - \frac{1}{a} \left[ S \frac{d^{S-1} W(p, x)}{dp^{S-1}} + p \frac{d^S W(p, x)}{dp^S} \right] = 0, \\ \frac{-\lambda}{\alpha_0} \frac{d}{dx} \frac{d^S W(p, x)}{dp^S} \Big|_{x=0} + \frac{d^S W(p, x)}{dp^S} \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 \text{ при } S > 0, \\ 1 \text{ при } S = 0, \end{cases} \\ \frac{d}{dx} \frac{d^S W(p, x)}{dp^S} \Big|_{x=\delta} = 0. \end{cases}$$

Розглядаємо одержану систему при  $p=0$ , враховуючи (2.72), отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} [s!(-1)^S C_s(x)] - \frac{1}{a} [s(s-1)!(-1)^{S-1} C_{s-1}(x)] = 0, \\ -\frac{\lambda}{\alpha_0} \frac{d}{dx} [s!(-1)^S C_s(x)] \Big|_{x=0} + s!(-1)^S C_s(x) \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 \text{ при } S > 0, \\ 1 \text{ при } S = 0, \end{cases} \\ \frac{d}{dx} [s!(-1)^S C_s(x)] \Big|_{x=\delta} = 0. \end{cases}$$

Спростуємо: 
$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} C_s(x) - \frac{1}{a} C_{s-1}(x) = 0, \\ -\frac{\lambda}{\alpha_0} \frac{d}{dx} C_s(x) \Big|_{x=0} + C_s \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 \text{ при } S > 0, \\ 1 \text{ при } S = 0, \end{cases} \\ \frac{d}{dx} C_s(x) \Big|_{x=\delta} = 0. \end{cases} \quad (2.89)$$

При  $S=0$   $C_0(x)=1$ , як це видно з (2.88). Отже, при  $S=1$  (2.89) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \frac{d^2 C_1(x)}{dx^2} = -\frac{1}{a}, \\ -\frac{\lambda}{\alpha_0} \frac{dC_1(x)}{dx} \Big|_{x=0} + C_1(x) = 0, \\ \frac{dC_1(x)}{dx} \Big|_{x=\delta} = 0. \end{cases} \quad (2.90)$$

Двічі послідовно інтегруємо перше рівняння системи (2.90):

$$\frac{dC_1(x)}{dx} = -\frac{1}{a}(x + D_2); \quad (2.91)$$

$$C_1(x) = -\frac{1}{a} \left( \frac{x^2}{2} + D_2x + D_3 \right). \quad (2.92)$$

Підставляємо (2.91), (2.92) в друге і третє рівняння системи (2.90):

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} D_2 + D_3 = 0, \\ \delta + D_2 = 0, \end{cases}$$

звідки

$$D_2 = -\delta; \quad (2.93)$$

$$D_3 = \frac{\lambda}{\alpha_0} D_2. \quad (2.94)$$

При  $S=2$  (2.89) з урахуванням (2.92) дають:

$$\begin{cases} \frac{d^2 C_2(x)}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{x^2}{2} + D_2x + D_3 \right), \\ -\frac{\lambda}{\alpha_0} \frac{dC_2(x)}{dx} \Big|_{x=0} + C_2(x) \Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{dC_2(x)}{dx} \Big|_{x=\delta} = 0. \end{cases} \quad (2.95)$$

Інтегруємо перше рівняння системи (2.95):

$$\frac{dC_2(x)}{dx} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{x^3}{3!} + D_2 \frac{x^2}{2!} + D_3 \frac{x^2}{1!} + D_4 \right); \quad (2.96)$$

$$C_2(x) = \frac{1}{a^2} \left( \frac{x^4}{4!} + D_2 \frac{x^3}{3!} + D_3 \frac{x^2}{2!} + D_4 \frac{x}{1!} + D_5 \right). \quad (2.97)$$

Підставляємо (2.96), (2.97) в друге і третє рівняння системи (2.95):

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} D_4 + D_5 = 0, \\ \frac{\delta^3}{3!} + D_2 \frac{\delta^2}{2!} + D_3 \frac{\delta^2}{1!} + D_4 = 0, \end{cases}$$

звідки 
$$D_4 = -\left(\frac{\delta^3}{3!} + D_2 \frac{\delta^2}{2!} + D_3 \frac{\delta}{1!}\right). \quad (2.98)$$

$$D_5 = \frac{\lambda}{\alpha_0} D_4. \quad (2.99)$$

При  $S=3$  з (2.89) з урахуванням (2.97) маємо:

$$\begin{cases} \frac{d^2 C_3(x)}{dx^2} = \frac{-1}{a^2} \left( \frac{x^4}{4!} + D_2 \frac{x^3}{3!} + D_3 \frac{x^2}{2!} + D_4 \frac{x}{1!} + D_5 \right), \\ -\frac{\lambda}{\alpha_0} \frac{dC_3(x)}{dx} \Big|_{x=0} + C_3(x) \Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{dC_3(x)}{dx} \Big|_{x=\delta} = 0. \end{cases} \quad (2.100)$$

Інтегруємо перше рівняння системи (2.100):

$$\frac{dC_3(x)}{dx} = \frac{-1}{a^3} \left( \frac{x^5}{5!} + D_2 \frac{x^4}{4!} + D_3 \frac{x^3}{3!} + D_4 \frac{x^2}{2!} + D_5 \frac{x}{1!} + D_6 \right); \quad (2.101)$$

$$C_3(x) = \frac{-1}{a^3} \left( \frac{x^6}{6!} + D_2 \frac{x^5}{5!} + D_3 \frac{x^4}{4!} + D_4 \frac{x^3}{3!} + D_5 \frac{x^2}{2!} + D_6 \frac{x}{1!} + D_7 \right). \quad (2.102)$$

Підставляємо (2.101), (2.102) в друге і третє рівняння системи (2.100):

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} D_6 + D_7 = 0, \\ \frac{\delta^5}{5!} + D_2 \frac{\delta^4}{4!} + D_3 \frac{\delta^3}{3!} + D_4 \frac{\delta^2}{2} + D_5 \frac{\delta}{1!} + D_6 = 0, \end{cases}$$

звідки 
$$D_6 = -\left(\frac{\delta^5}{5!} + D_2 \frac{\delta^4}{4!} + D_3 \frac{\delta^3}{3!} + D_4 \frac{\delta^2}{2} + D_5 \frac{\delta}{1!}\right); \quad (2.103)$$

$$D_7 = \frac{\lambda}{\alpha_0} D_6. \quad (2.104)$$

Одержані результати можна узагальнити у вигляді рекурентних формул для  $C_s$  та його коефіцієнтів:

$$C_s(x) = \frac{(-1)^s}{a^s} \sum_{z=0}^{2s} D_{2s+1-z} \frac{x^z}{z!}, \quad s \geq 0, \quad (2.105)$$

$$\text{де} \quad D_1 = 1, \quad (2.106)$$

$$\begin{cases} D_{2s} = - \sum_{z=1}^{2s-1} D_{2s-z} \frac{\delta^{zz}}{z!}, \\ D_{2s+1} = \frac{\lambda}{\alpha_0} D_{2s}. \end{cases} \quad (2.107)$$

$$\text{При } x=0 \text{ матимемо:} \quad C_s(x)|_{x=0} = \frac{(-1)^s}{a^s} D_{2s+1}, \quad s \geq 0. \quad (2.108)$$

Обчислення коефіцієнтів  $C_s(x)$  за формулою (2.105) можна оформити у вигляді підпрограми Csplst:

```

procedure Csplst (Del, Lam, A, A0:real; n:integer; var
                  C:Coefl);
var s,z:integer; Sum, Dz, Ka, Xz:real
begin
  c[-1]:=n; c[0]:=1; d[1]:=1; Ka:=1;
  for s:=1 to n do begin
    Sum:=0;
    Dz:=1;
    for zi=1 to 2*s-1 do begin
      Dz:=Dz*Del/z;
      Sum:=Sum+D[2*s-z]*Dz;
    end;
    D[2*s]:=-Sum;
    D[2*s+1]:=lam/A0*D[*s];
    Sum:=D[2*s+1]; Xz:=1;
    for z:=1 to 2*s do begin
      Xz:=Xz*x/z;
      Sumi=Sum+D[2*s+1-z]*Xz
    end;
    Ka:=-Ka/A;
    C[s]:=Ka*Sum;
  end;
end;

```

В цій підпрограмі Del – це  $\delta$ , Lam ( $\lambda$ ), A (a), A0 ( $\alpha_0$ ), n – необхідна кількість коефіцієнтів  $C_s$ , в масиві C розміщуються коефіцієнти за схемою  $C_s = C[s]$ , в C[-1] записується n.

## 2.2.4. Визначення коефіцієнтів $C_S$ з передаточної функції об'єкта з розподіленими параметрами

Коли передаточна функція об'єкта з розподіленими параметрами може бути одержана аналітично і виявляється відносно нескладною, її можна використати безпосередньо для обчислення коефіцієнтів  $C_S$  її розкладання в ряд Маклорена за формулою (2.72). Проілюструємо цей метод на прикладі об'єкта, що розглядався в розд.1.3. Його математична модель:

$$\begin{cases} T_0 \frac{\partial \theta^0}{\partial t} + T_0 W_0 \frac{\partial \theta^0}{\partial x} + \theta^0 = \theta^1, \\ T_1 \frac{\partial \theta^1}{\partial t} + \theta^1 = b_0 \theta^0 + b_1 \theta^{SL}, \\ \theta^0 \Big|_{x=0} = \theta^{0,inp}(t). \end{cases} \quad (2.109)$$

Якщо ненульовий приріст надати  $\theta^{0,inp}(t)$  (температурі теплоносія на вході в трубопровід), то після перетворення Лапласа і ділення на  $\theta^{0,inp}(t)$  матимемо:

$$\begin{cases} W_0 T_0 \frac{dW_0(p,x)}{dx} + (T_0 p + 1) W_0(p,x) = W_1(p,x), \\ (T_1 p + 1) W_1(p,x) = b_0 W_0(p,x), \\ W_0(p,x) \Big|_{x=0} = 1. \end{cases} \quad (2.110)$$

Підставляємо значення  $W_1(p,x)$  з першого рівняння системи (2.110) в друге рівняння цієї ж системи:

$$(T_1 p + 1) \left[ W_0 T_0 \frac{dW_0(p,x)}{dx} + (T_0 p + 1) W_0(p,x) \right] = b_0 W_0(p,x),$$

або:

$$W_0 T_0 (T_1 p + 1) \frac{dW_0(p,x)}{dx} + [(T_1 p + 1)(T_0 p + 1) - b_0] W_0(p,x) = 0. \quad (2.111)$$

Характеристичне рівняння, що відповідає (2.111):

$$W_0 T_0 (T_1 p + 1) r(p) + [(T_1 p + 1)(T_0 p + 1) - b_0] W_0(p,x) = 0. \quad (2.112)$$

Його корінь:

$$r(p) = - \frac{(T_1 p + 1)(T_0 p + 1) - b_0}{(T_1 p + 1) W_0 T_0}, \quad (2.113)$$

Отже, розв'язок (2.112):

$$W_0(p,x) = E e^{r(p)x},$$

а якщо врахувати третє рівняння системи (2.110), то

$$W_0(p,x) = e^{r(p)x}. \quad (2.114)$$

При  $p=0$  формула (2.112) дає

$$k(x) = e^{-\frac{1-b_0}{W_0 T_0} x}. \quad (2.115)$$

Нормована передаточна функція, що відповідає (2.114):

$$W(p,x) = \frac{W_0(p,x)}{k(x)} = e^{-\frac{b_2 p^2 + p}{T_1 p + 1} y}, \quad (2.116)$$

$$\text{де } b_2 = \frac{T_0 T_1}{T_0 + T_1 b_0}; \quad y = \frac{T_0 + T_1 b_0}{W_0 T_0} x.$$

Введемо позначення:

$$B(p) = \frac{b_2 p^2 + p}{T_1 p + 1} y. \quad (2.117)$$

Тоді (2.116) можна подати так:

$$W(p,x) = e^{-B(p)}. \quad (2.118)$$

Згідно з формулою (2.72) при  $S=0$  маємо:

$$C_0 = W(p,x)|_{p=0} = 1. \quad (2.119)$$

Продиференціюємо (2.117) відносно  $p$ :

$$\frac{dB(p)}{dp} = y \frac{(2b_2 p + 1)(T_1 p + 1) - T_1 (b_2 p^2 + p)}{(T_1 p + 1)^2},$$

або після спрощення:

$$\frac{dB(p)}{dp} = y \frac{b_2 T_1 p^2 + 2b_2 p + 1}{(T_1 p + 1)^2}. \quad (2.120)$$

Тепер диференціюємо (2.118):

$$\frac{dW(p)}{dp} = -\frac{dB(p)}{dp} e^{-B(p)}. \quad (2.121)$$

Підставляємо (2.121) в (2.72) при  $S=1$ :

$$C_1=y. \quad (2.122)$$

Диференціюємо ще раз (2.120):

$$\frac{d^2 B(p)}{dp^2} = y \frac{(2b_2 T_1 p + 2b_2)(T_1 p + 1)^2 - 2(T_1 p + 1)T_1(b_2 T_1 p^2 + 2b_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)^4}. \quad (2.123)$$

А тепер диференціюємо (2.121):

$$\frac{d^2 W(p)}{dp^2} = - \left( \frac{d^2 B(p)}{dp^2} e^{-B(p)} - \left[ \frac{dB(p)}{dp} \right]^2 e^{-B(p)} \right). \quad (2.124)$$

Підставляємо (2.124) в (2.72) при  $S=2$ :

$$C_2 = -\frac{1}{2} \left[ y(2b_2 + 2T_1) - y^2 \right]$$

або 
$$C_2 = \frac{y^2}{2} - y(b_2 + T_1). \quad (2.125)$$

Цей процес можна продовжувати.

## 2.2.5. Визначення $C_s$ шляхом подання трансцендентної передаточної функції у вигляді відношення узагальнених поліномів

Коефіцієнти  $C_s$  можна також одержувати, якщо у виразі для трансцендентної передаточної функції вдається замінити трансцендентні вирази в її чисельнику та знаменнику степеневими рядами відносно  $p$ , після чого чисельник та знаменник набувають вигляду узагальнених поліномів (поліномів нескінченних степенів). Ділячи потім чисельник на знаменник, можна розкласти передаточну функцію в ряд Маклорена, отже, і одержати шукані коефіцієнти  $C_s$ .

Продемонструємо викладений алгоритм на прикладі передаточної функції плоскої стінки, що розглядалась у розд.1.1. формула (1.9):

$$W_{\theta^{SL} \rightarrow \theta|_{x=0}}(p) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{th} \left( \delta \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (2.126)$$

Легко бачити, що коефіцієнт передачі для (2.126) дорівнює 1, отже (2.126) можна розглядати як нормовану. Якщо подати  $th\left(\delta\sqrt{\frac{p}{a}}\right)$  в (2.126) степеневим рядом, то як

було показано раніше (1.21):

$$W(p) = \frac{1}{1 + a_1 p - a_2 p^2 + a_3 p^3 - a_4 p^4 + \dots}, \quad (2.127)$$

$$\text{де } a_1 = \frac{\delta \rho c}{\alpha_0}; \quad a_2 = \frac{1}{3} \frac{\delta^3 \rho c}{\alpha_0 a}; \quad a_3 = \frac{2}{15} \frac{\delta^5 \rho c}{\alpha_0 a^2}; \quad a_4 = \frac{17}{315} \frac{\delta^7 \rho c}{\alpha_0 a^3}; \quad \dots$$

Ділимо чисельник (2.127) на його знаменник:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 1 + a_1 p - a_2 p^2 + a_3 p^3 - a_4 p^4 + \dots \\ \hline - a_1 p + a_2 p^2 - a_3 p^3 + a_4 p^4 - \dots \\ \hline - a_1 p - a_1^2 p^2 + a_1 a_2 p^3 - a_1 a_3 p^4 + \dots \\ \hline (a_1^2 + a_2) p^2 - (a_1 a_2 + a_3) p^3 + (a_1 a_3 + a_4) p^4 - \dots \\ \hline (a_1^2 + a_2) p^2 + a_1 (a_1^2 + a_2) p^3 - a_2 (a_1^2 + a_2) p^4 + \dots \\ \hline - [a_1 (a_1^2 + a_2) + a_1 a_2 + a_3] p^3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 + a_1 p - a_2 p^2 + a_3 p^3 - a_4 p^4 + \dots \\ \hline 1 - a_1 p + (a_1^2 + a_2) p^2 - (a_1^3 + 2a_1 a_2 + a_3) p^3 + \dots \end{array}$$

$$\text{Отже,} \quad W(p) = 1 - a_1 p + (a_1^2 + a_2) p^2 - (a_1^3 + 2a_1 a_2 + a_3) p^3 + \dots \quad (2.128)$$

Порівнюємо (2.128) з (2.70). Маємо відповідно:

$$C_0 = 1, \quad (2.129)$$

$$C_1 = a_1, \quad (2.130)$$

$$C_2 = a_1^2 + a_2, \quad (2.131)$$

$$C_3 = a_1^3 + 2a_1 a_2 + a_3, \quad (2.132)$$

...

де значення  $a_1, a_2, a_3, \dots$  беруться з (2.127).

## 2.2.6. Визначення коефіцієнтів $C_s$ шляхом розкладання дробово-раціональної передаточної функції в степеневий ряд

Щойно, в попередньому розділі, ми ділили узагальнені поліноми, що було характерно для передаточних функцій об'єктів з розподіленими параметрами (систем нескінченно високого порядку). Аналогічна проблема може виникати і для об'єктів (систем) скінченного, але відносно високого порядку, який з якихось причин бажано було б понизити.

Для простоти будемо вважати, що маємо справу з нормованою передаточною функцією, тобто зведеною до одиничного коефіцієнта передачі. Отже нехай

$$W(p) = \frac{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_{n_b} p^{n_b}}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_{n_a} p^{n_a}}. \quad (2.133)$$

Результатом ділення чисельника (2.133) на його знаменник має бути ряд типу (2.52),

тобто

$$\frac{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_{n_b} p^{n_b}}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_{n_a} p^{n_a}} = 1 - C_1 p + C_2 p^2 - C_3 p^3 + \dots \quad (2.134)$$

Множачи ліву та праву частини (2.134) на знаменник передаточної функції та порівнюючи одержані в лівій та правій частині поліноми, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = 1, \\ a_1 - C_1 = b_1, \\ a_2 - a_1 C_1 + C_2 = b_2, \\ a_3 - a_2 C_1 + a_1 C_2 - C_3 = b_3, \\ a_4 - a_3 C_1 + a_2 C_2 - a_1 C_3 + C_4 = b_4, \\ \dots \end{cases}$$

яка елементарно розв'язується у рекурентній формі:

$$\begin{cases} C_1 = a_1 - b_1, \\ C_2 = -a_2 + a_1 C_1 + b_2, \\ C_3 = a_3 - a_2 C_1 + a_1 C_2 - b_3, \\ C_4 = -a_4 + a_3 C_1 - a_2 C_2 + a_1 C_3 + b_4, \\ \dots \end{cases}$$

Даний розв'язок легко узагальнюється:

$$C_S = \sum_{L=1}^S (-1)^{L+1} a_L C_{S-L} + (-1)^S b_S, \quad (2.135)$$

якщо вважати, що  $C_0=a_0=b_0=1$ . Розв'язок (2.135) оформимо у вигляді підпрограми:

```

PROCEDURE CSGPAP (B,A:COEF; N:INTEGER; VAR C:COEF);
  VAR NA, NG, S, L, LNA, LNB:INTEGER;
Begin
  Na:=Round(A[-1]);
  NG := Round(B[-1]);
  C[-1]:=n;
  C[0] :=1;
  LnB:=-1;
  for S:=1 to n do begin
    LnA:=1;
    C[S] :=0;
    for L:=1 to S do begin
      if L<=Na then C[S]:=C[S]+A[L]*C[S-L]*LnA;
      LnA :=-LnA;
    end;
    if S<=NG then begin
      C[S]:=C[S]+G[S]*LnB;
      LnB :=-LnB;
    end;
  end;
end;
end;

```

### 2.2.7. Визначення коефіцієнтів дробово-раціональної апроксимуючої передаточної функції за масивом коефіцієнтів $C_S$

Нехай апроксимуючу передаточну функцію шукаємо у вигляді:

$$W(p) = \frac{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}, \quad (2.136)$$

а коефіцієнти  $C_S$  структури (2.67) наявні в достатній кількості ( $m \geq 2n$ ) у масиві  $C$  структури:

	-1	0	1	2	3			m	
C	m	1	$C_1$	$C_2$	$C_3$			$C_m$	

Отже, повинна мати місце рівність:

$$\begin{aligned} (1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_n p^n) (1 - C_1 p + C_2 p^2 - C_3 p^3 + \dots) = \\ = 1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Розкриваючи дужки та порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $p$  у лівій та правій частинах, отримуємо систему співвідношень (для конкретності взято  $n=3$ ):

$$\begin{array}{l|l} p^1 & a_1 - C_1 = b_1, \\ p^2 & a_2 - a_1 C_1 + C_2 = b_2, \\ p^3 & a_3 - a_2 C_1 + a_1 C_2 - C_3 = b_3, \\ p^4 & -a_3 C_1 + a_2 C_2 - a_1 C_3 + a_0 C_4 = 0, \\ p^5 & a_3 C_2 - a_2 C_3 + a_1 C_4 - a_0 C_5 = 0, \\ p^6 & -a_3 C_3 + a_2 C_4 - a_1 C_5 + a_0 C_6 = 0. \end{array}$$

Ця система, як легко бачити, розпадається на дві підсистеми: останні три ( $n$ ) рівняння можуть бути розв'язані відносно коефіцієнтів  $a_1, a_2, a_3$  (тобто від  $a_1$  до  $a_n$ , тоді як  $a_0=1$ ), після чого з перших трьох ( $n$ ) рівнянь можна визначити  $b_1, b_2, b_3$  ( $b_0=1$ ). Запишемо систему рівнянь відносно  $a_1, a_2, \dots, a_n$  так:

$$\begin{cases} C_3 a_1 - C_2 a_2 + C_1 a_3 = C_4, \\ C_4 a_1 - C_3 a_2 + C_2 a_3 = C_5, \\ C_5 a_1 - C_4 a_2 + C_3 a_3 = C_6. \end{cases}$$

Розширена матриця цієї системи:

$$\begin{vmatrix} C_3 & -C_2 & C_1 & C_4 \\ C_4 & -C_3 & C_2 & C_5 \\ C_5 & -C_4 & C_3 & C_6 \end{vmatrix}.$$

Або після узагальнення:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ 1 & C_n & -C_{n-1} & C_{n-2} & \dots & C_1 & C_{n+1} \\ 2 & C_{n+1} & -C_n & C_{n-1} & \dots & C_2 & C_{n+2} \\ 3 & C_{n+2} & -C_{n+1} & C_n & \dots & C_3 & C_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & C_{2n-1} & -C_{2n-2} & C_{2n-3} & \dots & C_n & C_{2n} \end{array} \end{array}.$$

Коефіцієнти  $b_s$  визначаються з перших  $n$  рівнянь (після визначення  $a_s$ ) за узагальненою формулою:

$$b_S = \sum_L^S a_{S-L} C_L (-1)^L, \quad 1 \leq S \leq n. \quad (2.138)$$

Визначення коефіцієнтів  $a_S$ ,  $b_S$ ,  $1 \leq S \leq n$  відповідно до розглянутого алгоритму, оформимо у вигляді підпрограми:

```

Procedure AsBs (C: Coef, n: integer; var B,A: Coef);
var S,Zn: integer;
    D: Matr;
begin
  for L:=1 to n do
    begin
      Zn:=1;
      for S:=1 to n do
        begin
          D[L,S]:=C[n+L-S]*Zn;
          Zn:=-Zn;
        end;
      D[L,n+1]:=C[n+L];
    end;
  Systur(n,D,A);
  A[0]:=1; B[0]:=1; B[-1]:=n;
  for S:=1 to n do
    begin
      B[S]:=0; Zn:=1;
      for L:=0 to S do
        begin
          B[S]:=B[S]+A[S-L]*C(L)*Zn;
          Zn:=-Zn;
        end;
    end
  end;
end;

```

### 3. АПРОКСИМАЦІЯ ЗА ЧАСТОТНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

#### 3.1. Апроксимація однією з елементарних динамічних ланок за амплітудно-фазовою характеристикою

Раніше (див. розд. 1.2) уже згадувалось про необхідність при виборі апроксимуючої структури враховувати діапазон частот, в якому повинна забезпечуватись адекватність моделі об'єкту. У найпростіших випадках як апроксимуюча структура може розглядатись одна із елементарних динамічних ланок. Розглянемо ті з них, що найчастіше використовуються з цією метою.

Безінерційну, інтегральну та ідеальну диференціальну ланки розглядати як апроксимуючі не будемо, вони надто прості, і якщо й використовуються, то визначення їх параметрів – очевидне. Почнемо з реальної диференціальної ланки.

##### 3.1.1. Реальна диференціальна ланка

$$W(p) = k \frac{T p}{T p + 1}. \quad (3.1)$$

$$W(j\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega), \quad (3.2)$$

$$\text{де } \operatorname{Re}(\omega) = k \frac{(T\omega)^2}{1 + (T\omega)^2}; \quad \operatorname{Im}(\omega) = k \frac{T\omega}{1 + (T\omega)^2}.$$

Годограф амплітудно-фазової характеристики для (3.2) показано на рис.3.1.

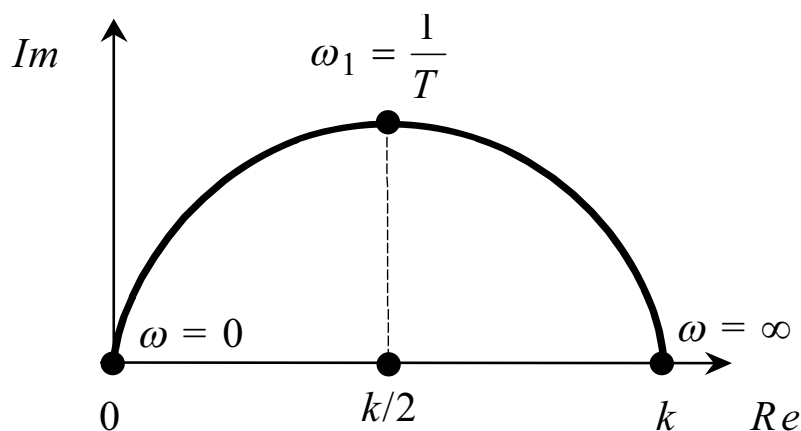


Рис. 3.1. Амплітудно-фазова характеристика реальної диференціальної ланки  
Коефіцієнт передачі  $k$  – це межа, до якої наближається годограф при  $\omega \rightarrow \infty$ .

$$k = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\omega). \quad (3.3)$$

Як видно з (3.2):

$$\operatorname{Re}(\omega_1) = \frac{k}{2}; \quad \operatorname{Im}(\omega_1) = \frac{k}{2},$$

тобто найвища точка годографа відповідає частоті  $\frac{1}{T}$ . Коли ця частота  $\omega_1$  відома, то

легко визначається:

$$T = \frac{1}{\omega_1}. \quad (3.4)$$

Якщо в наявності є кілька точок годографа, наприклад, з частотами  $\omega_2, \omega_3, \dots$ , то розв'язком рівняння:

$$\operatorname{Re}(\omega_2) = k \frac{(T\omega_2)^2}{1 + (T\omega_2)^2} \quad (3.5)$$

чи

$$\operatorname{Im}(\omega_2) = k \frac{T\omega_2}{1 + (T\omega_2)^2}, \quad (3.6)$$

відносно  $T\omega_2$ , а потім відносно  $T$  (оскільки  $\omega_2$  вважається відомим), можна уточнити (усереднити) значення  $T$  в околі бажаного значення частоти. З іншого боку, можна перевірити правомірність (прийнятність) моделі типу (3.1) для даного об'єкта. Зрозуміло, що абсолютно необхідною умовою успішності апроксимації є близькість форми годографа амплітудно-фазової характеристики до півкола, показаного на рис.3.1, принаймні, в околі частоти, прийнятої за базову.

### 3.1.2. Інтегро-диференціальна ланка

$$W(p) = k \frac{\alpha T p + 1}{T p + 1}; \quad (3.7)$$

$$W(j\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega), \quad (3.8)$$

де  $\operatorname{Re}(\omega) = k \frac{1 + \alpha(T\omega)^2}{1 + (T\omega)^2}$ ;  $\operatorname{Im}(\omega) = k(\alpha - 1) \frac{T\omega}{1 + (T\omega)^2}$ .

Годограф (3.8) показано на рис.3.2.

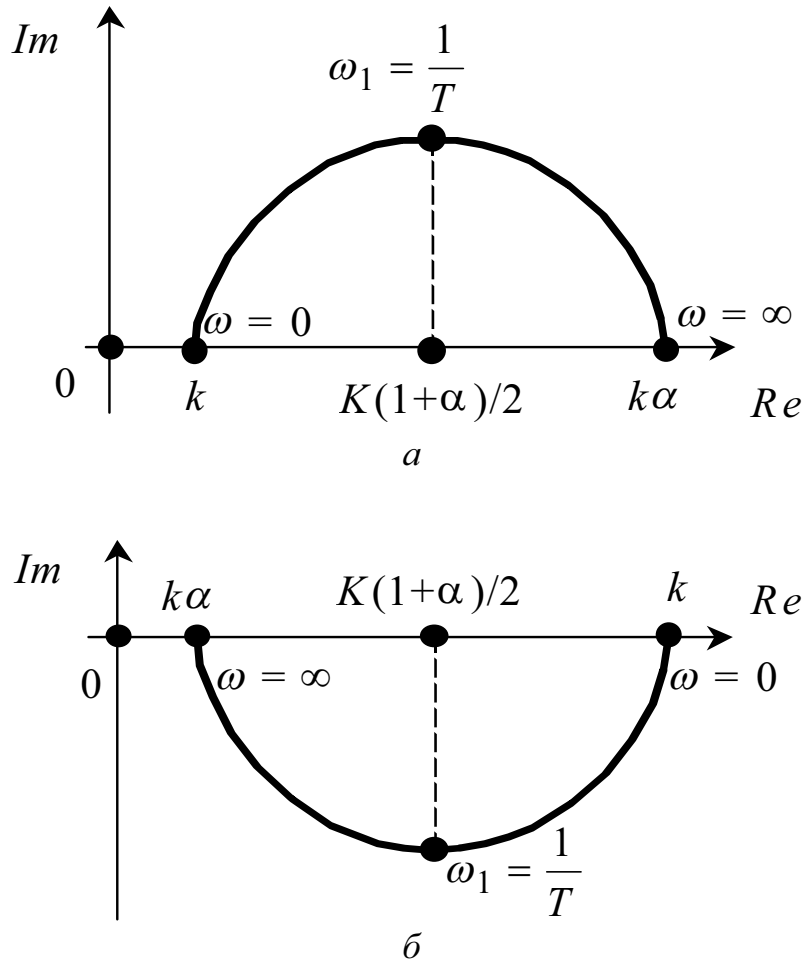


Рис. 3.2. Годограф амплітудно-фазової характеристики інтегро-диференціальної ланки *a* – для  $\alpha > 1$ , *б* – для  $\alpha < 1$

З наведених формул і рис. 3.2. видно, що:

$$k = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}(\omega); \quad (3.9)$$

$$\alpha = \frac{1}{k} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\omega); \quad (3.10)$$

$$T = \frac{1}{\omega_1}, \quad (3.11)$$

де  $\omega_1$  – частота найвищої ( $\alpha > 1$ ) чи, відповідно, найнижчої ( $\alpha < 1$ ) точки годографа.

Маючи додаткові точки чи точки з іншими частотами (скажімо, не рівними  $\omega_1$ ), використовуючи вирази для  $\operatorname{Re}(\omega)$  та (чи)  $\operatorname{Im}(\omega)$  у формулі (3.8), легко скласти одну чи кілька систем рівнянь відносно коефіцієнтів передаточної функції (3.7) з метою їх визначення, уточнення чи перевірки прийнятності даної структури.

### 3.1.3. Аперіодична ланка першого порядку

$$W(p) = \frac{k}{T p + 1}; \quad (3.12)$$

$$W(j\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega), \quad (3.13)$$

$$\text{де } \operatorname{Re}(\omega) = \frac{k}{1 + (T\omega)^2}; \quad \operatorname{Im}(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + (T\omega)^2}.$$

Годограф (3.13) наведено на рис.3.3.

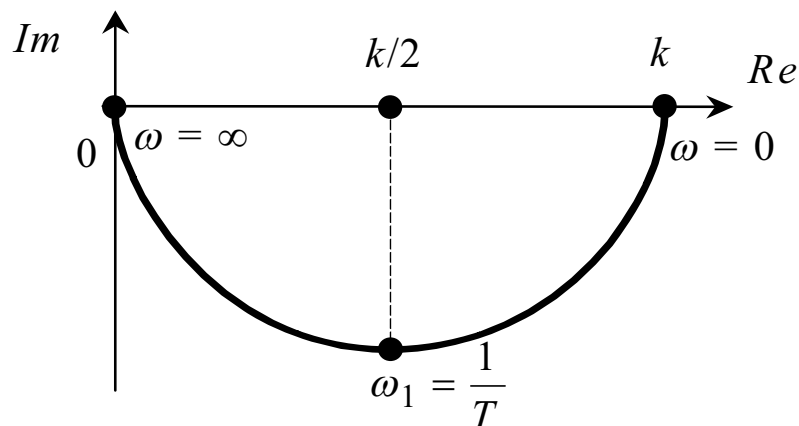


Рис.3.3. Годограф амплітудно-фазової характеристики аперіодичної ланки першого порядку

З формули (3.13) та рис.3.3 видно, що:

$$k = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}(\omega); \quad (3.14)$$

$$T = \frac{1}{\omega_1}, \quad (3.15)$$

де, як і в попередніх випадках,  $\omega_1$  – частота найнижчої точки годографа.

Все, що було сказано щодо уточнення, перевірки для попередніх ланок, залишається в силі стосовно і даної ланки.

### 3.1.4. Аперіодична ланка другого порядку та коливальна ланка

$$W(p) = \frac{k}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}; \quad (3.16)$$

$$W(j\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega), \quad (3.17)$$

$$\text{де } \operatorname{Re}(\omega) = k \frac{1 - a_2 \omega^2}{(1 - a_2 \omega^2)^2 + (a_1 \omega)^2}; \quad \operatorname{Im}(\omega) = -k \frac{a_1 \omega}{(1 - a_2 \omega^2)^2 + (a_1 \omega)^2}.$$

Годограф:

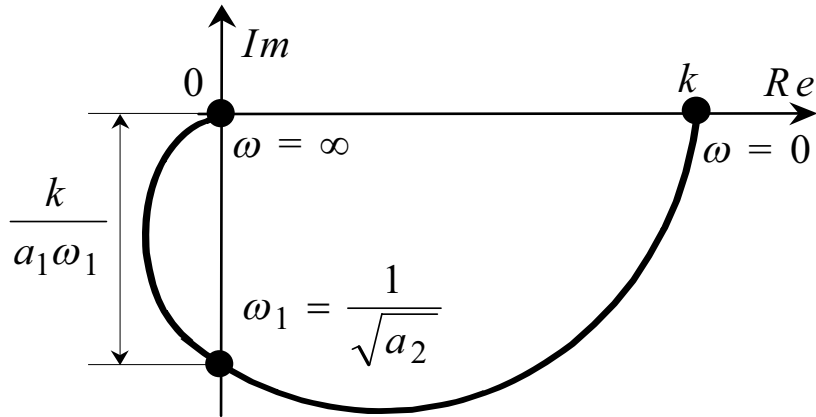


Рис. 3.4. Годограф амплітудно-фазової характеристики аперіодичної та (чи) коливальної ланок

З формул (3.17) та рис. 3.4 видно, що

$$k = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}(\omega); \quad (3.18)$$

$$a_2 = \frac{1}{\omega_1^2}, \quad (3.19)$$

де  $\omega_1$  – частота точки перетину годографа з уявною піввіссю.

Визначаючи  $\operatorname{Im}(\omega_1)$ , яке виявляється рівним  $-\frac{k}{a_1 \omega_1}$ , легко обчислити коефіцієнт  $a_1$ :

$$a_1 = \frac{k}{\omega_1 |\operatorname{Im}(\omega_1)|}. \quad (3.20)$$

### 3.1.5. Консервативна ланка

$$W(p) = \frac{k}{a_2 p^2 + 1}; \quad (3.21)$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - a_2 \omega^2}. \quad (3.22)$$

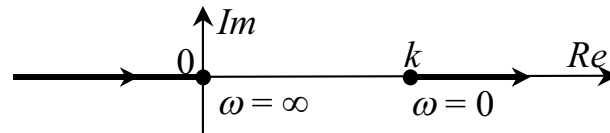


Рис. 3.5. Годограф амплітудно-фазової характеристики консервативної ланки

Отже, 
$$k = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}(\omega). \quad (3.23)$$

Для визначення  $a_2$  досить знати  $\operatorname{Re}(\omega)$  для будь-якої ненульової частоти:

$$\operatorname{Re}(\omega_2) = \frac{k}{1 - a_2 \omega_2^2},$$

звідки 
$$a_2 = \frac{1 - \frac{k}{\operatorname{Re}(\omega_2)}}{\omega_2^2}. \quad (3.24)$$

Звичайно, краще було б мати графік  $A(\omega)$  (рис. 3.6, а) або  $\operatorname{Re}(\omega)$  (рис. 3.6, б)

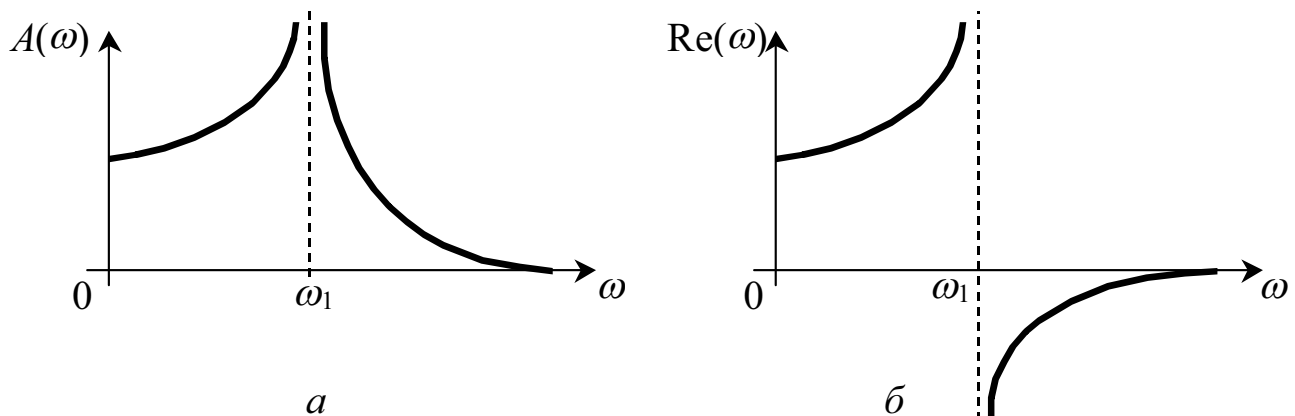


Рис.3.6. Амплітудно-частотна та дійсно-частотна характеристики консервативної ланки

Тут  $\omega_1$  – резонансна частота, коли  $A(\omega)$  та  $\operatorname{Re}(\omega)$  стають нескінченними (принаймні

максимальними за модулем). Очевидно, що 
$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{a_2}},$$

звідки 
$$a_2 = \frac{1}{\omega_1^2}. \quad (3.25)$$

### 3.1.6. Ланка транспортного запізнювання

$$W(p) = e^{-p\tau}; \quad (3.26)$$

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}. \quad (3.27)$$

Зручніше за все оцінювати  $\tau$  за значенням фазо-частотної характеристики для певної частоти, скажімо, деякої  $\omega_1$ :  $\varphi(\omega_1) = -\omega_1\tau$ ,

звідки 
$$\tau = -\frac{\varphi(\omega_1)}{\omega_1}. \quad (3.28)$$

### 3.2. Розрахунок частотних характеристик за дробово-раціональною передаточною функцією

Частотні характеристики, що відповідають дробово-раціональним передаточним функціям, доводиться обчислювати як при спробах визначення ефективного порядку передаточної функції, так і при підборі параметрів апроксимуючої передаточної функції із умов близькості частотних характеристик.

Розглянемо спочатку задачу обчислення значення полінома при комплексному значенні аргументу. Якщо скористатися схемою Хорнера, то черговий крок зводиться до таких операцій:

$$\text{Re}^H + j \text{Im}^H = (\text{Re}^c + j \text{Im}^c)(R + jI) + a_s, \quad (3.29)$$

де  $\text{Re}^H, \text{Im}^H$  – нові значення дійсно- та уявно- частотних характеристик;  $\text{Re}^c, \text{Im}^c$  – попередні їх значення;  $R, I$  – дійсна та уявна частини аргументу;  $a_s$  – черговий коефіцієнт полінома.

Даний алгоритм оформимо у вигляді підпрограми HorComp:

```

procedure HorComp(A: Coef; R, I: real; var Re, Im: real);
var S, n: integer;
    R1: real;
begin
  n:=round(A[-1]); Re:=A[n]; Im:=0;
  for s := n-1 downto 0 do
    begin
      R1:=Re*R-Im*I+A[s];
      Im:=Re*I+Im*R;
      Re:=R1
    end
  end;
end;
```

Ця процедура зроблена "із запасом" – можна було б для задачі, що розглядається, вважати  $R$  з самого початку рівним нулю, але додаткові можливості, які надає HorComp, виправдовують незначне ускладнення як її самої, так і користування нею.

Отже, коли маємо процедуру HorComp, то з її допомогою можемо легко обчислити значення чисельника  $B(p)|_{p=j\omega}$  (нехай, це буде, наприклад,  $R_1 + jI_1$ ), потім аналогічно  $A(p)|_{p=j\omega} = R_2 + jI_2$  і, нарешті, ділячи  $R_1 + jI_1$  на  $R_2 + jI_2$ :

$$W(p)|_{p=j\omega} = \frac{R_1 + jI_1}{R_2 + jI_2} = \frac{(R_1 + jI_1)(R_2 - jI_2)}{R_2^2 + I_2^2} = \text{Re} + j \text{Im}, \quad (3.30)$$

$$\text{де } \text{Re} = \frac{R_1 R_2 + I_1 I_2}{R_2^2 + I_2^2}; \quad \text{Im} = \frac{I_1 R_2 - R_1 I_2}{R_2^2 + I_2^2}.$$

Остаточно дістанемо

```
procedure AFC(B,A:Coef; w:real; var Re,Im:real);
var R1,I1,R2,I2,Zn:real;
begin
  HorComp(B,0,w,R1,I1);
  HorComp(A,0,w,R2,I2);
  Zn:=sqr(R2)+sqr(I2);
  Re:=(R1*R2+I1*I2)/Zn;
  Im:=(I1*R2-R1*I2)/Zn;
end;
```

### 3.3. Розрахунок частотних характеристик за системою $n$ диференціальних рівнянь першого порядку

Нехай маємо систему, математична модель якої подана у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{dy_Z}{dt} = \sum_{S=1}^n A_{Z,S} y_S + \sum_{S=1}^m B_{Z,S} x_S, \quad 1 \leq Z \leq n, \quad (3.31)$$

де  $y_Z$  – виходи;  $x_S$  – входи об'єкта, записані у приростах відносно їх значень в усталеному режимі, взятому за базовий.

Будемо також вважати, що розглядається "віяло" каналів, спільним вхідним сигналом яких є  $x_{NX}$ , а виходами – усі можливі виходи  $y_S$  ( $1 \leq S \leq n$ ). У такому разі ненульовий приріст надамо тільки сигналу  $x_{NX}$ , тоді як для інших входів приріст

будемо вважати нульовим. За нульових початкових умов після проведення перетворення Лапласа над (3.31) та ділення на зображення за Лапласом від  $x_{NX}$  матимемо

$$pW_{NX,Z}(p) = \sum_{S=1}^n A_{Z,S}W_{NX,S}(p) + B_{Z,NX}, \quad 1 \leq Z \leq n, \quad (3.32)$$

де  $W_{NX,S}(p)$  – передаточна функція каналу " $x_{NX} \rightarrow y_S$ ", тобто:  $W_{NX,S}(p) = \frac{\bar{y}_S}{\bar{x}_{NX}}$ ,

де, в свою чергу,  $\bar{x}_{NX} = \int_0^{\infty} x_{NX} e^{-pt} dt$ ;  $\bar{y}_S = \int_0^{\infty} y_S e^{-pt} dt$ .

Виконуючи заміну  $p = j\omega$  в (3.32), одержуємо:

$$j\omega(R_Z + jI_Z) = \sum_{S=1}^n A_{Z,S}(R_S + jI_S) + B_{Z,NX}, \quad 1 \leq Z \leq n, \quad (3.33)$$

де  $R_S, I_S$  – дійсно- та уявно-частотна характеристики каналу з виходом  $y_S$ ;

$R_Z, I_Z$  – відповідно для каналу з виходом  $y_Z$ .

Кожне з рівнянь (3.33) розпадається на два незалежних рівняння (для дійсних та уявних частин). Запишемо їх для  $Z$ -го рівняння системи (3.33):

$$\begin{cases} \sum_{S=1}^n A_{Z,S} R_S + \omega I_Z = -B_{Z,NX}, \\ -\omega R_Z + \sum_{S=1}^n A_{Z,S} I_S = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

В результаті одержимо систему  $2n$  рівнянь відносно  $2n$  невідомих ( $R_S, I_S, 1 \leq S \leq n$ ). Розташуємо невідомі у такому порядку:  $R_1, R_2, \dots, R_n, I_1, I_2, \dots, I_n$ , і спочатку поставимо рівняння для дійсних частин, а вже потім – рівняння для уявних частин, тоді розширена матриця  $M_s$  матиме таку структуру:

		1	2	3	...	$n$	$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$2n$	$2n+1$
$M_S$	1	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	...	$A_{1,n}$	$\omega$	0	0	...	0	$-B_{1,NX}$
	2	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{2,3}$	...	$A_{2,n}$	0	$\omega$	0	...	0	$-B_{2,NX}$
	3	$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	$A_{3,3}$	...	$A_{3,n}$	0	0	$\omega$	...	0	$-B_{3,NX}$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	$n$	$A_{n,1}$	$A_{n,2}$	$A_{n,3}$	...	$A_{n,n}$	0	0	0	...	$\omega$	$-B_{n,NX}$
	$n+1$	$-\omega$	0	0	...	0	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	...	$A_{1,n}$	0
	$n+2$	0	$-\omega$	0	...	0	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{2,3}$	...	$A_{2,n}$	0
	$n+3$	0	0	$-\omega$	...	0	$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	$A_{3,3}$	...	$A_{3,n}$	0
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	$2n$	0	0	0	...	$-\omega$	$A_{n,1}$	$A_{n,2}$	$A_{n,3}$	...	$A_{n,n}$	0

-1 0 1 2 3 ...  $n$   $n+1$   $n+2$   $n+3$  ...  $I_n$

$X$	$2n$	$\sim$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	...	$R_n$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	...	$I_n$
-----	------	--------	-------	-------	-------	-----	-------	-------	-------	-------	-----	-------

Під матрицею  $M_S$  показана структура масиву  $X$ , призначеного для розміщення компонент вектора - розв'язку.

Сам розв'язок виконується шляхом звернення до процедури `Systur` [22]. Значення дійсно- та уявно-частотних характеристик для заданого значення частоти  $\omega$  беруться з відповідних комірок масиву  $X$ , сформованого процедурою `Systur`,

$$R_S = X[S]; \quad (3.35)$$

$$I_S = X[n + S]. \quad (3.36)$$

### 3.4. Розрахунок частотних характеристик за імпульсною характеристикою

У розд.3.3 показано алгоритм розрахунку частотних характеристик об'єкта із зосередженими параметрами безпосередньо за системою диференціальних рівнянь його математичної моделі. На жаль, для об'єктів з розподіленими параметрами, де частотні характеристики є функціями просторових координат, такого простого алгоритму знайти не вдається. Розрахунок частотних характеристик подібних об'єктів шляхом виведення формул для передаточних функцій з подальшою заміною  $p = j\omega$  виявляється надзвичайно трудомістким, і з цієї причини не практикується. Водночас, чисельне інтегрування систем диференціальних рівнянь, в

тому числі рівнянь у частинних похідних, на сьогодні досить добре відпрацьовано [1, 12, 20, 24]. Отже, чисельно інтегруючи математичну модель при відповідних початкових (нульових) та граничних (де вхідний сигнал дорівнює  $1(t)$ ) умовах, можна розрахувати перехідну характеристику  $h(t)$  необхідного каналу в досліджуваному об'єкті чи системі. Імпульсна характеристика  $g(t)$  може бути легко отримана з перехідної:

$$g(t) = \frac{d}{dt}[h(t)]. \quad (3.37)$$

Далі можна скористатись відомими формулами [18, 33, 42]:

$$\operatorname{Re}(\omega) = \int_0^{\infty} g(t) \cos(\omega t) dt; \quad (3.38)$$

$$\operatorname{Im}(\omega) = - \int_0^{\infty} g(t) \sin(\omega t) dt. \quad (3.39)$$

Для переважної більшості технологічних об'єктів характерний скінченний час перехідних процесів в них, отже, можна (і треба) в процесі розрахунку підібрати таке мінімальне значення  $D$  (час спостереження), при якому:

$$g(t)|_{t>D} < \varepsilon. \quad (3.40)$$

При виконанні умови (3.40) верхню межу інтегрування в (3.38), (3.39) можна замінити на  $D$  і тоді

$$\operatorname{Re}(\omega) \approx \int_0^D g(t) \cos(\omega t) dt; \quad (3.41)$$

$$\operatorname{Im}(\omega) \approx - \int_0^D g(t) \sin(\omega t) dt. \quad (3.42)$$

При практичній реалізації розрахунків імпульсну характеристику одержуємо у вигляді масиву  $Mg$  такої структури: (type CoefL = array[-1..NmL] of real)

	-1	0	1	2	3	...	$L$				
$Mg$	$L$	$g_0$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	...	...	$g_L$			

де  $Mg[S] = g(S Dt)$ ,  $0 \leq S \leq L$ ;  $Dt = D/L$ .

У такому випадку інтеграли (3.41), (3.42) за формулою трапецій можуть бути подані

$$\text{так:} \quad \text{Re}(\omega) = Dt \left[ \frac{Mg[0]}{2} + \sum_{S=1}^{L-1} Mg[S] \cos(\omega \cdot S \cdot Dt) \right]; \quad (3.43)$$

$$\text{Im}(\omega) = -Dt \sum_{S=1}^{L-1} Mg[S] \sin(\omega \cdot S \cdot Dt). \quad (3.44)$$

Тут прийнято, що  $Mg[L] \approx 0$ . Формули (3.43), (3.44) забезпечують прийнятну точність розрахунку  $\text{Re}(\omega)$  та  $\text{Im}(\omega)$  за умови, якщо в межах періоду коливань, що відповідає частоті  $\omega$ , поміщається принаймні не менше 20 ординат імпульсної характеристики, тобто коли  $\frac{2\pi}{\omega_M} \geq 20 \cdot Dt$ . Після спрощення маємо:

$$\omega_M \leq \frac{\pi}{10 \cdot Dt}. \quad (3.45)$$

А якщо  $\omega > \omega_M$ ? Тоді можна "ущільнити" масив  $Mg$ , тобто заповнити його ординатами з меншим кроком, скажімо з кроком  $Dtw$ , який задовольняє умову:

$$\frac{2\pi}{\omega} = 20 \cdot Dtw,$$

$$\text{звідки} \quad Dtw = \frac{\pi}{10\omega}. \quad (3.46)$$

Обчислювати ординати імпульсної характеристики з таким кроком (виходячи з існуючого масиву  $Mg$  з кроком  $Dt$ ) можна різними способами. Ми пропонуємо робити це, використовуючи кубічні сплайни [22, 29]. Процедура `Spline` [22], яка формує масиви  $A0, A1, A2, A3$ : `CoefR` коефіцієнтів сплайна типу:

$$\psi_S(x) = a_{0,S} + a_{1,S}(x - x_{S-1}) + a_{2,S}(x - x_{S-1})^2 + a_{3,S}(x - x_{S-1})^3, \quad (3.47)$$

використовує масив  $G$ : `CoefR`, де `Type CoefR = array[-1..Nmr] of real`.

Щоб привести масив  $Mg$ : `CoefL` до вигляду  $G$ : `CoefR`, масив  $Mg$  треба "прорідити", тобто вибрати з нього кожену  $k$ -ту ординату, де  $k$ , скажімо, дорівнює 3, 5, 6 чи 10. Конкретний вибір значення  $k$  залежить від вибраних значень  $L$  та  $Nmr$  (задається в модулі `SunVar`), та від наявності вільної оперативної пам'яті в програмі, яка реалізує розглядуваний алгоритм. Тоді

$$Lspl = L \text{ div } k; \quad (3.48)$$

$$Lw = \text{round}(D/Dtw). \quad (3.49)$$

Підпрограма *Splint*, яка виконує сплайнову інтерполяцію, орієнтована на нормоване значення  $X$ , тобто таке, яке змінюється в діапазоні  $0 \leq X \leq Lspl$ . З урахуванням сказаного алгоритм обчислення  $X$  (значення дійсно-частотної характеристики  $Re(\omega)$ ) та  $Y$  – (відповідно уявно-частотної характеристики  $Im(\omega)$ ) для поточного значення  $w$  ( тобто частоти  $\omega$  ) може бути оформлений у вигляді підпрограми *UrGod*:

```

procedure UrGod;
var wt,Dtw,g,r:real;
    s,Lw:integer;
begin
  x:=Mg[0]/2; y:=0;
  if w<Pi/(10*Dt)
  then begin
    for s:=1 to L-1 do begin
      wt:=w*s*Dt; g:=Mg[s];
      x:=x+g*cos(wt); y:=y-g*sin(wt);
    end;
    x:=x*Dt; y:=y*Dt;
  end
  else begin
    Dtw:=Pi/(10*w);
    Lw:=round(D/Dtw);
    Dtw:=D/Lw;
    Lspl:=round(A0[-1]);
    for s:=1 to Lw-1 do begin
      wt:=w*s*Dtw;
      g:=Splint(s*Lspl/Lw);
      x:=x+g*cos(wt); y:=y-g*sin(wt);
    end;
    x:=x*Dtw; y:=y*Dtw;
  end;
  if syst then case Nzr of
    1: begin x:=x*Kreg; y:=y*Kreg; end;
    2: begin r:=y*Kreg/w; y:=-x*Kreg/w; x:=r end;
    3: begin
      r:=Kreg*(x-y*Tv*w);
      y:=Kreg*(y+x*Tv*w); x:=r;
    end;
    4: begin
      r:=Kreg*(x+y/(Ti*w));

```

```

        y:=Kreg*(y-x/(Ti*w)); x:=r;
    end;
5: begin
        r:=Kreg*(x-y*(Tv*w-1/(Ti*w)));
        y:=Kreg*(y+x*(Tv*w-1/(Ti*w))); x:=r;
    end;
end;
end;
end;

```

Крім глобальних змінних  $X(\operatorname{Re}(w))$ ,  $Y(\operatorname{Im}(w))$ ,  $w(w)$ ,  $Dt(Dt)$ ,  $D(D)$ ,  $Lspl(Lspl)$ ,  $T(t)$ , масивів  $A0, A1, A2, A3$  коефіцієнтів сплайна, тут використано ідентифікатори  $Syst: boolean; Nzr: integer; Kreg, Ti, Tv: real;$

Введення цих ідентифікаторів викликано бажанням розширити діапазон можливостей процедури  $UrGod$ , а саме – зробити її придатною не лише для розрахунку частотних характеристик окремо взятого об'єкта, але й, при необхідності, – розімкненої системи, яка складається із заданого об'єкта та одного з типових лінійних регуляторів. Тип регулятора задається значенням змінної  $Nzr$  (номер закону регулювання: 1 – П, 2 – І, 3 – ПД, 4 – ПІ, 5 – ПІД).

$Kreg, Ti, Tv$  – відповідно коефіцієнт передачі, час ізодрому та час випередження у відповідному законі регулювання. Отже, коли  $Syst=True$ , то амплітудно-фазова характеристика об'єкта домножується на амплітудно-фазову характеристику відповідного регулятора, перетворюючись тим самим на амплітудно-фазову характеристику розімкненої системи.

### 3.5. Розрахунок резонансних частот коливальних об'єктів

Розрахунок частотних характеристик коливальних об'єктів з відносно інтенсивним затуханням коливань можна виконувати, моделюючи реакцію досліджуваного каналу на гармонічний вхідний сигнал і зіставляючи усталені (після затухання вільних складових) коливання виходу зі збуджуючими їх вхідними коливаннями. Але тут виникає проблема визначення моменту часу, починаючи з якого можна з достатніми підставами вважати, що вільні коливання уже практично затухли, щоб не ризикувати істотним спотворенням результату дослідження

(значень частотних характеристик) вільними, особливо, коливальними складовими які ще не встигли затухнути. Вказаного недоліку практично позбавлений метод розрахунку частотних характеристик, розглянутий в попередньому розділі. Тим більше, що "експеримент" по визначенню імпульсної характеристики  $g(t)$  тут треба виконати лише один раз, а не повторювати для кожного чергового значення частоти.

Проте даний метод може не спрацювати, коли  $D$  стає надто великим. Але це може мати місце, коли, наприклад, коливання, що можуть виникати в досліджуваному об'єкті, слабо або практично зовсім не згасають. Подібними властивостями можуть відзначатися деякі механічні системи, зокрема, елементи приладів, або, з іншого боку, автоколивальні системи тощо. Тоді необхідний час спостереження  $D \rightarrow \infty$  і чисельне інтегрування у формулах (3.41), (3.42) стає проблемою.

Однак саме для подібних об'єктів знання їх частотних характеристик набуває особливої актуальності, якщо враховувати їх підвищену чутливість до збурень, частоти яких близькі до їх власних (резонансних частот).

Отже, першою проблемою, яка має бути розв'язана для подібних систем, є визначення частот їх власних коливань. Математиками та інженерами запропоновано багато оригінальних методів обчислення значень резонансних частот динамічних систем, починаючи з визначення коренів характеристичного рівняння і закінчуючи аналізом вільних коливань об'єктів із розподіленими параметрами, наприклад, описуваних хвильовим рівнянням [1, 31] чи рівнянням коливань звисаючої важкої нитки з тягарем на її вільному кінці чи без нього [31]. Для нетривіальних задач розв'язання вказаної задачі зводиться до складних та трудомістких розрахунків, пошуку коренів трансцендентних рівнянь відносно спеціальних математичних функцій. Щоб довести розв'язок "до числа", доводиться розробляти спеціальне програмне забезпечення, оскільки можливостей загально-математичних програм та пакетів виявляється недостатньо.

Разом із тим існує універсальний метод визначення частот власних коливань будь-якої динамічної системи шляхом спектрального аналізу її вільних коливань. Розрахувати (чи промоделювати) вільні коливання за наявності математичної моделі, як уже згадувалось вище, – в межах наших можливостей.

Математичною базою спектрального аналізу, як відомо [42], є перетворення Фур'є

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt, \quad (3.50)$$

де  $F(j\omega)$  – спектральна характеристика функції  $f(t)$ .

Спектральну характеристику  $F(j\omega)$  можна подати у вигляді

$$F(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega), \quad (3.51)$$

де

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t) dt; \quad (3.52)$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t) dt \quad (3.53)$$

або, відповідно,

$$F(j\omega) = F(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.54)$$

де

$$F(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}; \quad (3.55)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{b(\omega)}{a(\omega)}. \quad (3.56)$$

При практичній реалізації формул (3.52), (3.53) межі інтегрування доводиться брати від 0 до  $D$  (час спостереження). Та обставина, що  $D$  – скінченна величина, приводить до того, що ми фактично отримуємо не справжню, спектральну характеристику, а так званий поточний спектр. При  $D \rightarrow \infty$  він усе більше буде наближатись до справжнього. Коли, наприклад,  $f(t)$  є періодичною функцією, то  $F(\omega)$  в міру зростання  $D$  буде наближатись до лінійчастого спектра, а екстремуми матимуть місце саме на частотах періодичних складових  $f(t)$ . А якраз вони нас і цікавлять, коли  $f(t)$  відображує вільний рух досліджуваної системи.

Для реалізації описаного алгоритму нами пропонується підпрограма *Specter*, яка формує на екрані графік поточного спектра як функцію від  $D$ , яке послідовно збільшується, скажімо, в міру надходження чергових ординат  $f(t)$ , байдуже, з якого джерела – датчика на експериментальній установці чи на досліджуваному об'єкті чи, що більш ймовірно, з комп'ютера, який моделює

вільний рух об'єкта дослідження. Тим самим формування поточного спектра виконується, так би мовити, в реальному часі. Користувач спостерігає на екрані монітора за формою та характером зміни поточного спектра, поки не дійде до висновку, що його екстремуми уже визначилися, з його точки зору, достатньо чітко і їх положення з прийнятною точністю можна розглядати як шукані резонансні (власні) частоти. Далі залишається зчитати ці частоти.

```

procedure Specter;
var wt, Y, Ys, TanSp, w: real;
    A, B: CoefL;
    Ye: CoefLi;
    Sn, Z, S, Sp, n, Nm: integer;
begin
  ClearDevice
  repeat
    PutA; On('0-вих, 1-Wn, 2-Wk, 3-Xout');
    InfoF;
    J1:=ReadKey;
    case J1 of
      '1': Our('Wn - початкове значення частоти', Wn);
      '2': Our('Wk - кінцеве значення частоти', Wk);
      '3': Our('Xont - координата точки спостереження',
              Xout)
    end
  until J1 = '0';
  TauSp:=TauS;
  TauS:=Pi/(10*Wk);
  CoefN;
  Dw:=(Wk-Wn)/L;
  Dx:=Dw;
  Xmin:=0; Xmax:=Wk;
  Ymin:=0; Ymax:=1;
  X0Y0(false); SystCoor;
  Z:=Y0-round(Ymax/(2*Dy));
  Init;
  for S:=0 to L do
    begin
      A[S]:=0;
      B[S]:=0;
      Ye[S]:=Z
    end;
  Ymax:=0; J1 := '1';
  PutA; Ou('Щоб вийти - натисніть 0');

```

```

Sn:=round(Wn/Dw);
repeat
  for u:=1 to RS do
    begin
      Stept;
      Y:=Yt[Nont];
      for S:=Sn to L do
        begin
          wt:=(Wn+s*Dw)*t;
          A[S]:=A[S]+Y*cos(wt);
          B[S]:=B[S]+Y*sin(wt)
        end
      end;
    for s:=Sn to L do
      begin
        Ys:=sqrt(sqr(A[S])+sqr(B[S]));
        Mo[S]:=Ys;
        if Ys>Ymax then Ymax:=Ys
      end;
    X0Y0(false);
    if KeyPressed then J1:=ReadKey;
    str(t:10:3, T0);
    Clear(GetMaxX-100,0,GetMaxX-1,8);
    OutTextXY(GetMaxX-100,0,'t='+T0);
    for S:=Sn to L do Ys[S]:=Y0-round(Mo[S]/Dy);
    Clear(1,10,GetMaxX-1,GetMaxY-11);
    SystCoor;
    MoveTo(Xn, Ye[Sn]);
    for S:=Sn+1 to L do LineTo(Xn+S,Ye[S]);
    inc(Z)
  until (J1='0') or (Z>L)
end;

```

Цю процедуру взято з програми Nit2 [31]. Знайдені з її допомогою резонансні частоти заносяться в масив  $Mw:Coef$  за схемою  $Ws \rightarrow Mw[S]$ . У комірці  $Mw[-1]$  – кількість внесених частот  $n$ .

### 3.6. Розрахунок частотних характеристик консервативних систем

Будемо вважати, що ми маємо можливість моделювати реакцію консервативної системи на гармонічний вхідний сигнал

$$X = A_{inp} \sin(\omega_0 t). \quad (3.56)$$

Резонансні (власні) частоти досліджуваної системи знаходяться в масиві Mw:Coef

такої структури:

	-1	0	1	2	3	...	n	
Mw	n	$\omega_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$		$\omega_n$	

У комірці з нульовим номером надалі будемо заносити частоту  $\omega_0$  (позначена  $\omega_0$ ).

Вважатимемо, що реакція  $y(t)$  даного об'єкта на вхідний сигнал (3.56) може бути наближено представлена (апроксимована) виразом типу [23]:

$$y_a(t) = A + \sum_{S=0}^n [A_S \cos(\omega_S t) + B_S \sin(\omega_S t)], \quad (3.57)$$

де  $\omega_S$  ( $0 \leq S \leq n$ ) – частоти, включаючи  $\omega_0$ ;  $A$  – можливий зсув середньої лінії коливань. Час  $D$  спостереження  $y(t)$  вибирається із умови, щоб

$$D \geq 10 \frac{2\pi}{\omega_{\min}}, \quad (3.58)$$

де  $\omega_{\min}$  – найменша з частот у масиві Mw.

Параметри  $A$ ,  $A_S$ ,  $B_S$  ( $0 \leq S \leq n$ ) формули (3.57) будемо шукати із умов мінімізації показника якості апроксимації

$$E = \int_0^D \left\{ A + \sum_{S=0}^n [A_S \cos(\omega_S t) + B_S \sin(\omega_S t)] - y(t) \right\}^2 dt. \quad (3.59)$$

Умови мінімізації  $E$ , як звичайно

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial A} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial A_Z} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial B_Z} = 0, \quad 0 \leq Z \leq n. \end{cases} \quad (3.60)$$

Розшифруємо умови (3.60):

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 2 \int_0^D \left\{ A + \sum_{S=0}^n [A_S \cos(\omega_S t) + B_S \sin(\omega_S t)] - y(t) \right\} dt = 0,$$

звідки

$$A \cdot D + \sum_{S=0}^n A_S \int_0^D \cos(\omega_S t) dt + \sum_{S=0}^n B_S \int_0^D \sin(\omega_S t) dt = \int_0^D y(t) dt. \quad (3.61)$$

Аналогічно

$$\frac{\partial E}{\partial A_Z} = 2 \int_0^D \left\{ A + \sum_{S=0}^n [A_S \cos(\omega_S t) + B_S \sin(\omega_S t)] - y(t) \right\} \cos(\omega_Z t) dt = 0, \quad 0 \leq Z \leq n,$$

звідки

$$\begin{aligned} A \int_0^D \cos(\omega_Z t) dt + \sum_{S=0}^n A_S \int_0^D \cos(\omega_Z t) \cos(\omega_S t) dt + \sum_{S=0}^n B_S \int_0^D \cos(\omega_Z t) \sin(\omega_S t) dt = \\ = \int_0^D y(t) \cos(\omega_Z t) dt, \quad 0 \leq Z \leq n. \end{aligned} \quad (3.62)$$

І нарешті,

$$\frac{\partial E}{\partial B_Z} = 2 \int_0^D \left\{ A + \sum_{S=0}^n [A_S \cos(\omega_S t) + B_S \sin(\omega_S t)] - y(t) \right\} \sin(\omega_Z t) dt = 0, \quad 0 \leq Z \leq n,$$

звідки

$$\begin{aligned} A \int_0^D \sin(\omega_Z t) dt + \sum_{S=0}^n A_S \int_0^D \sin(\omega_Z t) \cos(\omega_S t) dt + \sum_{S=0}^n B_S \int_0^D \sin(\omega_Z t) \sin(\omega_S t) dt = \\ = \int_0^D y(t) \sin(\omega_Z t) dt, \quad 0 \leq Z \leq n. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Рівняння (3.61) – (3.63) утворюють систему  $(2n+3)$  лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $(2n+3)$  невідомих коефіцієнтів формули (3.57). Зберемо ці невідомі у масив вигляду:

$$X \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n+2 & n+3 & n+4 & n+5 & \dots & 2n+3 \\ \hline & 2n+3 & \sim & A & A_0 & A_1 & \dots & A_n & B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ \hline \end{array}$$

Елементи розширеної матриці  $C$  коефіцієнтів системи (3.61) – (3.63) будемо обчислювати за формулами:

$$C_{1,S} = \begin{cases} D & \text{при } S = 1, \\ \int_0^D \cos(\omega_{S-2} t) dt & \text{при } 2 \leq S \leq n+2 \quad (v=1), \\ 0 \\ \int_0^D \sin(\omega_{S-n-3} t) dt & \text{при } n+3 \leq S \leq 2n+3 \quad (v=2), \\ 0 \\ \int_0^D y(t) dt & \text{при } S = 2n+4 \quad (v=3). \\ 0 \end{cases}$$

$$C_{Z,S} = \begin{cases} \int_0^D \cos(\omega_{Z-2}t) dt & \text{npu } S = 1 \quad (v = 4), \\ 0 \\ \int_0^D \cos(\omega_{Z-2}t)\cos(\omega_{S-2}t) dt & \text{npu } 2 \leq S \leq n+2 \quad (v = 5), \\ 0 \\ \int_0^D \cos(\omega_{Z-2}t)\sin(\omega_{S-n-3}t) dt & \text{npu } n+3 \leq S \leq 2n+3 \quad (v = 6), \\ 0 \\ \int_0^D y(t)\cos(\omega_{Z-2}t) dt & \text{npu } S = 2n+4 \quad (v = 7). \end{cases}$$

$$C_{Z,S} = \begin{cases} \int_0^D \sin(\omega_{Z-n-3}t) dt & \text{npu } S = 1 \quad (v = 8), \\ 0 \\ \int_0^D \sin(\omega_{Z-n-3}t)\cos(\omega_{S-2}t) dt & \text{npu } 2 \leq S \leq n+2 \quad (v = 9), \\ 0 \\ \int_0^D \sin(\omega_{Z-n-3}t)\sin(\omega_{S-n-3}t) dt & \text{npu } n+3 \leq S \leq 2n+3 \quad (v = 10), \\ 0 \\ \int_0^D y(t)\sin(\omega_{Z-n-3}t) dt & \text{npu } S = 2n+4 \quad (v = 11). \end{cases}$$

Тут літерою  $v$  позначено номер варіанта підінтегральної функції.

Оформимо заповнення масиву  $C$  у відповідності з щойно одержаними формулами підпрограмою `MasC`, розглядаючи масив  $C$  як глобальний.

```

procedure MasC(Mw:Coef; h:real; My:CoefL);
var n,L,Z,S,v:integer;
    wz: real;
    function Integral(v: integer; ws, wz:real):real;
    var i:integer;
        function F(t: real): real;
        begin
            case v of
                1: F:=cos(ws * t);
                2: F:=sin(ws*t);
                3: F:=My(t);
                4: F:=cos(wz*t);
                5: F:=cos(wz*t)*cos(ws*t);
                6: F:=cos(wz*t)*sin(ws*t);
                7: F:=My(t)*cos(wz*t);
                8: F:=sin(wz*t);
                9: F:=sin(wz*t)*cos(ws*t);
            end;
        end;
    end;

```

```

    10: F:=sin(wz*t)*sin(ws*t);
    11: F:=My(t)*sin(wz*t)
end
end;
begin
    S:=(F(0)+F(L*h))/2;
    for i:=1 to L-1 do S:=S+F(i*h);
    Integral:=S*h
end;
begin
    n:=round(Mw[-1]);
    L:=round(My[-1]);
    h:=My[L+1];
    C[1,1]:=L*h;
    for S:=2 to n+2 do C[1,S]:=Integral(1,Mw[S-2],0);
    for S:=n+3 to 2*n+3 do
        C[1,S]:=Integral(2,Mw[S-n-3],0);
    C[1,2*n+4]:=Integral(3,0,0);
    for Z:=2 to n+2 do begin
        wz:=Mw[Z-2];
        C[Z,1]:=Integral(4,0,Wz);
        for s:=2 to n+2 do C[Z,S]:=Integral(5,Mw[S-2],wz);
        for s:=n+3 to 2*n+3 do C[Z,S]:=Integral(6,Mw[S-n-3],wz);
        C[Z,2*n+4]:=Integral(7,0,wz)
    end;
    for Z:=n+3 to 2*n+3 do begin
        wz:=Mw[Z-n-3];
        C[Z,1]:=Integral(8,0,wz);
        for S:=2 to n+2 do C[Z,S]:=Integral(9,Mw[S-2],wz);
        for S:=n+3 to 2*n+3 do
            C[Z,S]:=Integral(10,Mw[S-n-3],wz);
        C[Z,2*n+4]:=Integral(11,0,wz)
    end
end;
end;

```

Розв'язуємо систему (3.61) – (3.63), викликаючи підпрограму Systur таким чином:

```
Systur(2 * n + 3, C, X);
```

Гармоніка з частотою  $\omega_0$  в  $y(t)$  згідно з розв'язком  $X$  матиме вигляд:

$$X[2] \cos(\omega_0 t) + X[n+3] \sin(\omega_0 t),$$

отже,

$$\operatorname{Re}(\omega_0) = \frac{X[n+3]}{A_{inp}}; \quad (3.64)$$

$$\operatorname{Im}(\omega_0) = \frac{X[2]}{A_{inp}}. \quad (3.65)$$

Формуючи реакції об'єкта на вхідні сигнали (3.56) з різними значеннями  $\omega_0$  та викликаючи послідовно процедури `MasC` та `Systur`, можна, як показано вище, розрахувати частотні характеристики для будь-якого заданого діапазону частот.

### 3.7. Апроксимація дробово-раціональною передаточною функцією за рядом точок амплітудно-фазової характеристики

Будемо вважати, що коефіцієнт передачі об'єкта  $k$  визначено на стадії ідентифікації статичних характеристик, і проблема зводиться до обчислення значень коефіцієнтів нормованої (зведеної до одиничного коефіцієнта передачі) передаточної функції:

$$W_a(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + 1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}. \quad (3.66)$$

Вихідним матеріалом для апроксимації візьмемо знову ж таки нормовані (ділені на  $k$ ) значення дійсно- та уявно-частотних характеристик  $R_S$  та  $I_S$  для ряду частот  $\omega_S$ , де  $1 \leq S \leq n$ . Замінюючи в (3.66)  $p$  на  $j\omega$  та прирівнюючи одержаний результат (АФХ) до комплексного числа  $R + jI$ , одержимо:

$$\text{для } n = 1: \quad \frac{1 + jb_1\omega}{1 + ja_1\omega} = R + jI,$$

$$\begin{aligned} \text{звідки} \quad R - a_1\omega I &= 1; \\ I + a_1\omega R &= b_1\omega \end{aligned}$$

$$\text{або} \quad \begin{cases} -a_1\omega I + b_1\omega = 1 - R, \\ a_1\omega R - b_1\omega = -I. \end{cases} \quad (3.67)$$

Якщо взяти довільне конкретне значення  $\omega$  (скажімо,  $\omega_1$ ) і відповідні йому значення  $R_1$  та  $I_1$ , то система (3.67) може бути розв'язана відносно  $a_1$  та  $b_1$ .

$$\text{Для } n = 2: \quad \frac{1 - b_2\omega^2 + jb_1\omega}{1 - a_2\omega^2 + ja_1\omega} = R + jI,$$

звідки

$$\begin{cases} (1 - a_2 \omega^2)R - a_1 \omega I = 1 - b_2 \omega^2; \\ (1 - a_2 \omega^2)I + a_1 \omega R = b_1 \omega \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} -a_1 \omega I - a_2 \omega^2 R + b_1 \cdot 0 + b_2 \omega^2 = 1 - R, \\ a_1 \omega R - a_2 \omega^2 I - b_1 \omega + b_2 \cdot 0 = -I. \end{cases} \quad (3.68)$$

Якщо співвідношення (3.68) розглянути спочатку при  $\omega = \omega_1$ , а потім при  $\omega = \omega_2$ , то одержимо систему з чотирьох рівнянь відносно чотирьох невідомих  $a_1, a_2, b_1, b_2$ .

Аналогічно для  $n = 3$ :

$$\begin{cases} -a_1 \omega I - a_2 \omega^2 R + a_3 \omega^3 I + b_1 \cdot 0 + b_2 \omega^2 + b_3 \cdot 0 = 1 - R, \\ a_1 \omega R - a_2 \omega^2 I - a_3 \omega^3 R - b_1 \omega + b_2 \cdot 0 + b_3 \omega^3 = -I. \end{cases} \quad (3.69)$$

Рівняння (3.69) треба розглянути послідовно для  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – матимемо систему з шести рівнянь відносно  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ .

При  $n = 4$ :

$$\begin{cases} -a_1 \omega I - a_2 \omega^2 R + a_3 \omega^3 I + a_4 \omega^4 R + b_1 \cdot 0 + b_2 \omega^2 + b_3 \cdot 0 - b_4 \omega^4 = 1 - R, \\ a_1 \omega R - a_2 \omega^2 I - a_3 \omega^3 R + a_4 \omega^4 I - b_1 \omega + b_2 \cdot 0 + b_3 \omega^3 + b_4 \cdot 0 = -I. \end{cases} \quad (3.70)$$

Рівняння (3.70) розглядаються для  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  – одержуємо систему з 8 рівнянь відносно  $a_1 \dots a_4, b_1 \dots b_4$ .

І цей процес можна продовжувати. Покажемо розширену матрицю  $D$  для  $n = 5$ :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$-\omega_1 I_1$	$-\omega_1^2 R_1$	$\omega_1^3 I_1$	$\omega_1^4 R_1$	$-\omega_1^5 I_1$	0	$\omega_1^2$	0	$-\omega_1^4$	0	$1 - R_1$
2	$-\omega_2 I_2$	$-\omega_2^2 R_2$	$\omega_2^3 I_2$	$\omega_2^4 R_2$	$-\omega_2^5 I_2$	0	$\omega_2^2$	0	$-\omega_2^4$	0	$1 - R_2$
3	$-\omega_3 I_3$	$-\omega_3^2 R_3$	$\omega_3^3 I_3$	$\omega_3^4 R_3$	$-\omega_3^5 I_3$	0	$\omega_3^2$	0	$-\omega_3^4$	0	$1 - R_3$
4	$-\omega_4 I_4$	$-\omega_4^2 R_4$	$\omega_4^3 I_4$	$\omega_4^4 R_4$	$-\omega_4^5 I_4$	0	$\omega_4^2$	0	$-\omega_4^4$	0	$1 - R_4$
5	$-\omega_5 I_5$	$-\omega_5^2 R_5$	$\omega_5^3 I_5$	$\omega_5^4 R_5$	$-\omega_5^5 I_5$	0	$\omega_5^2$	0	$-\omega_5^4$	0	$1 - R_5$
6	$\omega_1 R_1$	$-\omega_1^2 I_1$	$-\omega_1^3 R_1$	$\omega_1^4 I_1$	$\omega_1^5 R_1$	$-\omega_1$	0	$\omega_1^3$	0	$-\omega_1^5$	$-I_1$
7	$\omega_2 R_2$	$-\omega_2^2 I_2$	$-\omega_2^3 R_2$	$\omega_2^4 I_2$	$\omega_2^5 R_2$	$-\omega_2$	0	$\omega_2^3$	0	$-\omega_2^5$	$-I_2$
8	$\omega_3 R_3$	$-\omega_3^2 I_3$	$-\omega_3^3 R_3$	$\omega_3^4 I_3$	$\omega_3^5 R_3$	$-\omega_3$	0	$\omega_3^3$	0	$-\omega_3^5$	$-I_3$
9	$\omega_4 R_4$	$-\omega_4^2 I_4$	$-\omega_4^3 R_4$	$\omega_4^4 I_4$	$\omega_4^5 R_4$	$-\omega_4$	0	$\omega_4^3$	0	$-\omega_4^5$	$-I_4$
10	$\omega_5 R_5$	$-\omega_5^2 I_5$	$-\omega_5^3 R_5$	$\omega_5^4 I_5$	$\omega_5^5 R_5$	$-\omega_5$	0	$\omega_5^3$	0	$-\omega_5^5$	$-I_5$

Розв'язується система рівнянь викликом процедури `Systur`:  
`Systur(2*n, D, X)`, розв'язок у вигляді масиву  $X$  матиме вигляд:

	-1	0	1	2	...	n	n+1	n+2	...	2n
X	2n	~	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	...	a <sub>n</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	...	b <sub>n</sub>

Масив X можна представити двома масивами A та B такої структури (тип Coef):

	-1	0	1	2	3	...	n
A	n	1	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	...	a <sub>n</sub>

	-1	0	1	2	3	...	n
B	n	1	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	...	b <sub>n</sub>

Проілюструємо розв'язок задачі у вигляді процедури WPAFC.

```

procedure WPAFC(W,R,J:Coef; n:integer; var B,A:Coef);
var Z:integer;
    ws:real;
    D:Matr;
    X:Coef;
begin
  for Z:=1 to n do begin
    ws:=w[Z];
    D[Z,1]:=-ws*I[Z];
    D[Z+n,1]:=ws*R[Z];
    D[Z,2*n+1]:=1-R[Z];
    D[Z+n,2*n+1]:=-I[Z];
    if Z>1 then begin
      ws:=ws*w[Z];
      D[Z,2]:=-ws*R[Z];
      D[Z+n,2]:=-ws*I[Z];
      D[Z,n+2]:=ws;
      D[Z+n,n+2]:=0;
      if Z>2 then begin
        ws:=ws*w[Z];
        D[Z,3]:=ws*I[Z];
        D[Z+n,3]:=-ws*R[Z];
        D[Z,n+3]:=0;
        D[Z+n,n+3]:=ws;
        if Z>3 then begin
          ws:=ws*w[Z];
          D[Z,4]:=ws*R[Z];
          D[Z+n,4]:=ws*I[Z];
          D[Z,n+4]:=-ws;
          D[Z+n,n+4]:=0;
          if Z>4 then begin
            ws:=ws*w[Z];
            D[Z,5]:=-ws*I[Z];

```

```

        D[Z+n, 5] := ws*R[Z];
        D[Z, n+5] := -ws;
        D[Z+n, n+5] := 0
    end
end
end
end;
Systur(2*n, D, X);
A[-1] := n; A[0] := 1;
B[-1] := n; B[0] := 1;
for Z:=1 to n do begin
    A[Z] := X[Z];
    B[Z] := X[Z + n]
end
end;

```

Ця процедура розрахована на  $1 \leq n \leq 5$ . Маємо на увазі, що масиви  $w$ ,  $R$ ,  $I$  містять інформацію про достатню (не менше, ніж  $n$ ) кількість точок амплітудно-фазової характеристики досліджуваного каналу. Нагадуємо, що  $R$  та  $I$  – нормовані (до одиничного коефіцієнта передачі), а отже, і  $B$  та  $A$  також містять коефіцієнти нормованої апроксимуючої передаточної функції. Зрозуміло, що для апроксимації при фіксованому  $n$  будуть використовуватись перші  $n$  значень з масивів  $w$ ,  $R$ ,  $I$ .

Одержаний результат (апроксимуючу передаточну функцію) в разі потреби можна проаналізувати на стійкість (перевірити поліном  $A(p)$  за критерієм Гурвиця), мінімально-фазовість (додатково перевірити на стійкість ще й поліном  $B(p)$ ) чи на близькість відповідних частотних характеристик в якомусь іншому діапазоні частот, тощо.

## 4. НЕТРАДИЦІЙНІ МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ

### 4.1. Комп'ютерне визначення передаточних функцій за системою $n$ диференціальних рівнянь першого порядку

В інженерній практиці, коли математична модель задана лінійною системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, передаточні функції окремих каналів визначають шляхом послідовного виключення з системи усіх вихідних сигналів, крім того, який є виходом досліджуваного каналу. Цей нескладний по суті алгоритм може виявитись дуже громіздким, коли система має високий порядок. Ця обставина може бути стимулом для спрощення моделі шляхом ігнорування акумулюючої здатності ряду елементів, що входять у склад об'єкта дослідження, і які, на перший погляд, видаються другорядними. Надійно оцінити ступінь важливості тих чи інших чинників на очікуваний результат дослідження на початку цього дослідження не завжди можливо. Водночас труднощі виведення формул для передаточних функцій та розрахунку їх коефіцієнтів легко перекласти на комп'ютер і тим самим практично зняти обмеження на порядок досліджуваної системи.

Нехай модель об'єкта дослідження задана у вигляді:

$$\frac{dy_Z}{dt} = \sum_{S=1}^n A_{Z,S} Y_S + \sum_{S=1}^n B_{Z,S} X_S, \quad 1 \leq Z \leq n, \quad (4.1)$$

де  $Y_S$  – виходи;  $X_S$  – входи об'єкта, записані у приростах від їх значень в усталеному режимі, взятому за базовий.

Виконаємо над (4.1) перетворення за Лапласом при нульових початкових умовах:

$$\sum_{S=1}^n C_{Z,S}(p) \bar{Y}_S = - \sum_{S=1}^m B_{Z,S} \bar{X}_S, \quad 1 \leq Z \leq n, \quad (4.2)$$

$$\text{де } C_{Z,S}(p) = \begin{cases} A_{Z,S} - p & \text{при } S = Z, \\ A_{Z,S} & \text{при } S \neq Z, \end{cases};$$

$$\bar{X}_S = \int_0^{\infty} X_S e^{-pt} dt, \quad \bar{Y}_S = \int_0^{\infty} Y_S e^{-pt} dt.$$

Якщо із усіх можливих входів  $X_S$  ( $1 \leq S \leq m$ ) надати ненульовий приріст тільки входові  $X_{NX}$  і поділити (4.2) на  $\bar{X}_{NX}$ , то систему (4.2) можна подати так:

$$\sum_{S=1}^n C_{Z,S}(p)W_{NX,S}(p) = -B_{Z,NX}, \quad 1 \leq Z \leq n, \quad (4.3)$$

де  $W_{NX,S}(p)$  – передаточна функція каналу " $X_{NX} \rightarrow Y_S$ ".

Розв'яжемо систему (4.3) відносно  $W_{NX,S}(p)$  ( $1 \leq S \leq n$ ) методом Гауса. Розширена матриця  $Rm$  коефіцієнтів цієї системи має таку структуру:

	1	2	3	...	$n$	$n+1$
1	$A_{1,1} - p$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	...	$A_{1,n}$	$-B_{1,NX}$
2	$A_{2,1}$	$A_{2,2} - p$	$A_{2,3}$	...	$A_{2,n}$	$-B_{2,NX}$
$Rm$ 3	$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	$A_{3,3} - p$	...	$A_{3,n}$	$-B_{3,NX}$
...	...	...	...	...	...	...
$n$	$A_{n,1}$	$A_{n,2}$	$A_{n,3}$	...	$A_{n,n} - p$	$-B_{n,NX}$
	$W_{NX,1}(p)$	$W_{NX,2}(p)$	$W_{NX,1}(p)$	...	$W_{NX,n}(p)$	

Під кожним стовпцем матриці  $Rm$  показана передаточна функція (невідома), що відповідає даному стовпцю. Будемо вважати, що матриця  $Rm$  має тип M2C: `type M2C=array[1..n,1..n+m] of Coef`, де, в свою чергу, `type Coef = array[-1..30] of real`. Отже, елементами матриці  $Rm$  є поліноми, інформація про які розміщується в масиві типу `Coef` за такою схемою:

	-1	0	1	2	3	...	$k$	...	30
$A$	$k$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_k$	...	

Тут показано масив, що відповідає поліному:

$$A(p) = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \dots + a_1 p + a_0. \quad (4.4)$$

На стадії початкового заповнення матриці  $Rm$  до її комірок заносяться поліноми першого (типу  $A_{S,S} - p$ ) та нульового (типу  $A_{Z,S}$ ) степенів. У процесі подальших перетворень у відповідних комірках матриці  $Rm$  формуватимуться поліноми довільного степеня (до  $n$ -го включно, де  $n$  – порядок досліджуваної системи). Інформація про степінь відповідного полінома зберігається у комірці з номером  $-1$ .

Операції над поліномами в процесі реалізації схеми Гауса виконуються з використанням підпрограм-процедур (див. дод.3):

```

procedure AlSumPol (A, B:Coef; op:char; var C:Coef);
procedure UmnPol (A, B:Coef; var C:Coef);
procedure DelPol (A, B:Coef; var C, D:Coef) .

```

Процедура `AlSumPol` реалізує алгебраїчне додавання поліномів  $C(p) = A(p) \pm B(p)$ , де знак операції задається параметром  $op$  ( $op = '+'$ , або, відповідно,  $'-'$ ). Процедура `UmnPol` реалізує операцію:  $C(p) = A(p) B(p)$ ; і, нарешті, процедура `DelPol` виконує ділення поліномів:  $\frac{A(p)}{B(p)} = C(p) + \frac{D(p)}{B(p)}$ . Виконання прямого ходу в схемі Гауса,

тобто онулення елементів  $Rm[Z, i]$ , що розташовані нижче головної діагоналі, будемо реалізовувати, віднімаючи від  $Z$ -го рядка, помноженого на  $Rm[i, i]$ ,  $i$ -й рядок, помножений на  $Rm[Z, i]$ , і записуючи результат в той же  $Z$ -й рядок. Тут  $i$  – номер чергового діагонального елемента (того, під яким в даний момент онулюються елементи матриці  $Rm$ ). Після завершення прямого ходу останній рядок матриці  $Rm$  відповідатиме рівнянню:  $Rm[n, n] * W_{NX, n}(p) = Rm[n, n + 1]$ , звідки:

$$W_{NX, n}(p) = \frac{Rm[n, n + 1]}{Rm[n, n]}. \quad (4.5)$$

Відомо, що усі передаточні функції об'єкта із зосередженими параметрами, що описується системою (4.1), можуть бути подані у такому вигляді, коли їх знаменники будуть однакові, отже  $Rm[n, n]$  можна вважати спільним знаменником передаточних функцій усіх можливих каналів досліджуваного об'єкта [42].

Отже, при виконанні зворотного ходу схеми Гауса ми будемо шукати лише чисельники передаточних функцій каналів, що залишились. Для каналу " $X_{NX} \rightarrow Y_n$ " його чисельник уже фігурує у формулі (4.5). Знайдені чисельники передаточних функцій відповідних каналів будемо записувати в  $(n + 1)$ -й стовпець матриці  $Rm$  за схемою: чисельник передаточної функції каналу " $X_{NX} \rightarrow Y_n$ " – в комірку  $Rm[Z, n + 1]$ . Легко побачити, що невелика модифікація матриці  $Rm$ , а саме занесення в  $(n + s)$ -й стовпець значень  $-B_{Z, S}$  ( $1 \leq S \leq m$ ) при обслуговуванні в процесі прямого ходу стовпців до  $(n + m)$ -го включно, дозволяє в процесі зворотного ходу формувати в комірках  $Rm[Z, n + S]$  знаменники передаточних функцій каналів " $X_S \rightarrow Y_Z$ " ( $1 \leq S \leq m$ ,  $1 \leq Z \leq n$ ). Описаний алгоритм реалізує процедура `WPSU`.

```

procedure WPSU(A,B:M2; n,m:integer; var Rm:M2C);
var i,Z,S:integer;
    E,F,C,D:Coef;
begin
  for Z:=1 to N do begin
    for S:=1 to n do begin
      if S=2
      then begin
        Rm[Z,S,-1]:=1;
        Rm[Z,S,0]:=A[Z,Z];
        Rm[Z,S,1]:=-1
      end
      else begin
        Rm[Z,S,-1]:=0;
        Rm[Z,S,0]:=A[Z,S]
      end
    end;
    for S:=1 to m do begin
      Rm[Z,n+S,-1]:=0;
      Rm[Z,n+S,0]:=-B[Z,S]
    end
  end;
  for i:=1 to n-1 do begin
    C:=Rm[i,i];
    for Z:=i+1 to n do begin
      D:=Rm[Z,i];
      for S := Z to n + m do begin
        UmmPol(Rm[Z,S],C,E);
        UmmPol(Rm[i,s],D,F);
        AlSumPol(E,F,'-',Rm[Z,S])
      end
    end
  end;
  for Z:=1 downto 1 do
  for S:=1 to m do begin
    C[-1]:=0; C[0]:=0;
    for i:=Z+1 to n do begin
      UmmPol(Rm[Z,i],Rm[i,n+S],D);
      AlSumPol(C,D,'+',C)
    end;
    UmmPol(Rm[Z,n+S], Rm[n,n],D);
    AlSumPol(D,C,'-',C);
    DelPol(C,Rm[Z,Z],Rm[Z,n+S],D)
  end
end;
end;

```

Результатом роботи наведеної процедури є матриця  $Rm$ , над якою виконано щойно описаний алгоритм, отже в  $Rm[n, n]$  сформовано спільний знаменник передаточних функцій усіх можливих в даному об'єкті каналів, а в  $Rm[Z, n+S]$  – чисельники передаточних функцій каналів " $X_S \rightarrow Y_Z$ ". Програму, яка б "обслуговувала" процедуру WPSU, пропонуємо читачеві написати самостійно.

## 4.2. Визначення передаточної функції об'єкта за його реакцією на довільний вхідний сигнал

Уявімо, що зафіксовано як функції часу деякий вхідний сигнал  $X(t)$  та викликану ним реакцію  $Y(t)$  на виході об'єкта дослідження. Початкові умови вважаються нульовими. Така ситуація характерна за наявності математичної моделі, котра для безпосереднього використання вважається в певному розумінні незручною і необхідно підібрати будь-яку більш зручну модель, наприклад, у вигляді диференціального рівняння такого типу:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + y = b_m x^{(m)} + \dots + b_1 x' + b_0 x, \quad (4.6)$$

якому відповідає передаточна функція

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}. \quad (4.7)$$

Для конкретності нехай  $n = 3$ ,  $m = 2$ . Тоді (4.6) набуває вигляду:

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + y = b_2 x'' + b_1 x' + b_0 x. \quad (4.8)$$

Проінтегруємо (4.8) в межах від 0 до  $t$  (нагадуємо, що початкові умови прийнято

нульовими):

$$a_3 y'' + a_2 y' + a_1 y + \int_0^t y dt = b_2 x' + b_1 x + b_0 \int_0^t x dt. \quad (4.9)$$

А тепер проінтегруємо в тих же межах (4.9):

$$a_3 y' + a_2 y + a_1 \int_0^t y dt + \int_0^t \int_0^t y dt^2 = b_2 x + b_1 \int_0^t x dt + b_0 \int_0^t \int_0^t x dt^2. \quad (4.10)$$

І ще раз проінтегруємо (4.10):

$$a_3 y + a_2 \int_0^t y dt + a_1 \int_0^t \int_0^t y dt^2 + \int_0^t \int_0^t \int_0^t y dt^3 = b_2 \int_0^t x dt + b_1 \int_0^t \int_0^t x dt^2 + b_0 \int_0^t \int_0^t \int_0^t x dt^3. \quad (4.11)$$

Якщо за верхню межу зовнішнього інтеграла брати  $t_S$ , то (4.11) дає:

$$a_3 y|_{t=t_S} + a_2 \int_0^{t_S} y dt + a_1 \int_0^{t_S} \int_0^t y dt^2 + \int_0^{t_S} \int_0^t \int_0^t y dt^3 = b_2 \int_0^{t_S} x dt + b_1 \int_0^{t_S} \int_0^t x dt^2 + b_0 \int_0^{t_S} \int_0^t \int_0^t x dt^3. \quad (4.12)$$

Якщо надавати  $t_S$  послідовно ряд значень  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n+m+1}$ , то співвідношення (4.12) утворить систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_2, \dots, b_m$ . Цю систему можна розв'язати і якщо розв'язок буде знайдено, і він нас задовольнить, то тим самим задача апроксимації може вважатись розв'язаною. Коли  $X(t) = 1(t)$ , то інтеграли в правій частині (4.12) легко обчислюються:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_S} x dt &= t_S; \\ \int_0^{t_S} \int_0^t x dt^2 &= \frac{t_S^2}{2!}; \\ \int_0^{t_S} \int_0^t \int_0^t x dt^3 &= \frac{t_S^3}{3!}, \text{ або узагальнюючи:} \\ \int_0^{t_S} \int_0^t \dots \int_0^t x dt^k &= \frac{t_S^k}{k!}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Регулюючи розташування точок  $t_S$ , можна орієнтувати апроксимуючу структуру на відповідність перехідних характеристик на малих чи великих значеннях  $t$  і, відповідно, на високих чи низьких частотах.

Хоча, коли важливо забезпечити відповідність частотних характеристик в конкретному діапазоні частот, то, очевидно, доцільніше користуватись методами, що безпосередньо орієнтовані на частотний підхід.

### 4.3. Апроксимація шляхом розкладання передаточних функцій в ряди за від'ємними степенями $p$

Передаточну функцію, що підлягає апроксимації, а також апроксимуючу функцію можна подати, наприклад, так [17]:

$$W(p) = \sum_{S=0}^{\infty} \frac{f_S}{p^S}; \quad (4.14)$$

$$W_a(p) = \sum_{S=0}^{\infty} \frac{f_S^a}{p^S}. \quad (4.15)$$

Якщо вважати, що  $f_S$  – відомі, то виражаючи  $f_S^a$  як функції від коефіцієнтів апроксимуючої передаточної функції, можна скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} f_0^a = f_0, \\ f_1^a = f_1, \\ \dots \\ f_n^a = f_n, \end{cases} \quad (4.16)$$

яку потім можна спробувати розв'язати відносно невідомих коефіцієнтів, набираючи необхідну кількість рівнянь.

Розглянемо кілька прикладів:

а) нехай

$$W_a(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (4.17)$$

Виконаємо в (4.17) заміну  $p = \frac{1}{q}$ :

$$W_a(q) = k \frac{q}{T + q}. \quad (4.18)$$

Ділимо чисельник (4.18) на його знаменник:

$$\begin{array}{r}
 \frac{q}{q + \frac{q^2}{T}} \quad \left| \frac{T+q}{\frac{q}{T} - \frac{q^2}{T^2} + \frac{q^3}{T^3} - \dots} \right. \\
 - \frac{q^2}{T} \\
 - \frac{q^2}{T} - \frac{q^3}{T^2} \\
 \frac{q^3}{T^2} \\
 \dots
 \end{array}$$

Підставляємо одержаний результат в (4.18) та повертаємось до попередньої змінної

$$p: \quad W_a(p) = k \left( 0 + \frac{1}{Tp} - \frac{1}{T^2 p^2} + \frac{1}{T^3 p^3} - \dots \right). \quad (4.19)$$

Система (4.16) в даному випадку набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{k}{T} = f_1, \\ -\frac{k}{T^2} = f_2. \end{cases}$$

$$\text{Розв'язок іі:} \quad \begin{cases} T = -\frac{f_1}{f_2}, \\ k = Tf_1 = -\frac{f_1^2}{f_2}; \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\text{б)} \quad W_a(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (4.21)$$

$$\text{При } p = \frac{1}{q} \quad W_a = k \frac{q^2}{(T_1 + q)(T_2 + q)}. \quad (4.22)$$

Ділимо чисельник (4.22) на його знаменник:

$$\frac{q^2 - q^2 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} q^3 + \frac{1}{T_1 T_2} q^4}{\frac{1}{T_1 T_2} q^2 - \frac{T_1 + T_2}{(T_1 T_2)^2} q^3 + \frac{1}{(T_1 T_2)^2} \left[ \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} - 1 \right] q^4 - \dots}$$

$$\frac{-\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} q^3 - \frac{1}{T_1 T_2} q^4}{-\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} q^3 - \frac{(T_1 + T_2)^2}{(T_1 T_2)^2} q^4 - \frac{T_1 + T_2}{(T_1 T_2)^2} q^5}$$

$$\frac{1}{T_1 T_2} \left[ \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} - 1 \right] q^4 + \frac{T_1 + T_2}{(T_1 T_2)^2} q^5 \quad .$$

Повертаємось до попередньої змінної:

$$W_a(p) = k \left[ \frac{1}{T_1 T_2} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{T_1 + T_2}{(T_1 T_2)^2} \cdot \frac{1}{p^3} + \frac{(T_1 + T_2)^2}{(T_1 T_2)^3} \cdot \frac{1}{p^4} - \dots \right].$$

Система (4.16):

$$\begin{cases} \frac{k}{T_1 T_2} = f_2, \\ -k \frac{T_1 + T_2}{(T_1 T_2)^2} = f_3, \\ k \frac{(T_1 + T_2)^2}{(T_1 T_2)^3} = f_4. \end{cases} \quad (4.23)$$

Введемо позначення:

$$\begin{cases} T_1 T_2 = a_2, \\ T_1 + T_2 = a_1. \end{cases} \quad (4.24)$$

Підставляємо  $T_2$  з першого рівняння в друге:

$$T_1 + \frac{a_2}{T_1} = a_1$$

або, що те саме:  $T_1^2 - a_1 T_1 + a_2 = 0$ , звідки

$$T_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad (4.25)$$

і, відповідно

$$T_1 - T_2 = \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \quad (4.26)$$

Отже, система (4.23) з урахуванням (4.24) та (4.26) може бути переписана:

$$\begin{cases} k = f_2 a_2, \\ -k a_1 = f_3 a_2^2, \\ k(a_1^2 - 2a_2) = f_4 a^3 \end{cases} \quad (4.27)$$

або, позбавляючись від  $k$  за допомогою першого рівняння, зводимо (4.27) до

вигляду: 
$$\begin{cases} f_2 a_1 = -f_3 a_2, \\ f_2(a_1^2 - 4a_2) = f_4 a_2^2. \end{cases} \quad (4.28)$$

Якщо тепер підставимо  $a_2$  з першого рівняння (4.27), тобто:  $a_2 = -\frac{f_2}{f_3} a_1$  в друге, то

одержимо:  $f_2 \left( a_1^2 + 4 \frac{f_2}{f_3} a_1 \right) = f_4 \frac{f_2^2}{f_3^2} a_1^2$  або після спрощення (враховуючи, що

$a_1 \neq 0$ ),  $\left( f_2 - f_4 \frac{f_2^2}{f_3^2} \right) a_1 = -4 \frac{f_2}{f_3}$ , звідки:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \frac{f_2 f_3}{f_2^2 f_4 - f_2 f_3^2}, \\ a_2 = -\frac{f_2}{f_3} a_1. \end{cases} \quad (4.29)$$

$a_1, a_2$  з (4.29) можна підставити в (4.26) та одержати значення  $T_1$  та  $T_2$ .

Апроксимуюча структура (4.21) з коефіцієнтами, що визначаються за формулами (4.26), де  $a_1, a_2$  задає (4.29), або еквівалентна їй структура:

$$W_a(p) = \frac{k}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} \quad (4.30)$$

з коефіцієнтами (4.25) забезпечить близькість частотних характеристик моделі та об'єкта моделювання при  $\omega \rightarrow \infty$ , тобто на високих частотах.

#### 4.4. Розкладання дробово-раціональної передаточної функції в ряд за від'ємними степенями $p$

Подамо дробово-раціональну передаточну функцію у формі (4.14). Для конкретності покладемо  $m = 3$  (ступінь чисельника) та  $n = 5$  (ступінь знаменника)

$$\frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + a_4 p^4 + a_5 p^5} = c_0 + c_1 p^{-1} + c_2 p^{-2} + c_3 p^{-3} + \dots$$

або, що теж саме

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + a_4 p^4 + a_5 p^5)(c_0 + c_1 p^{-1} + c_2 p^{-2} + c_3 p^{-3} + \dots) = \\ = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Розкриваючи дужки в лівій частині (4.31) та порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $p$  в лівій та правій частинах, матимемо:

$$\begin{array}{l|l} p^5 & a_5 c_0 = 0, \\ p^4 & a_4 c_0 + a_5 c_1 = 0, \\ p^3 & a_3 c_0 + a_4 c_1 + a_5 c_2 = b_3, \\ p^2 & a_2 c_0 + a_3 c_1 + a_4 c_2 + a_5 c_3 = b_2, \\ p^1 & a_1 c_0 + a_2 c_1 + a_3 c_2 + a_4 c_3 + a_5 c_4 = b_1, \\ p^0 & a_0 c_0 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_4 c_4 + a_5 c_5 = b_0, \\ p^{-1} & a_{-1} c_0 + a_0 c_1 + a_1 c_2 + a_2 c_3 + a_3 c_4 + a_4 c_5 + a_5 c_6 = 0, \\ p^{-2} & a_{-2} c_0 + a_{-1} c_1 + a_0 c_2 + a_1 c_3 + a_2 c_4 + a_3 c_5 + a_4 c_6 + a_5 c_7 = 0. \\ & \dots \end{array}$$

Сформована система рівнянь послідовно розв'язується: з першого рівняння визначається  $c_0$ , з другого -  $c_1$  ( $c_0$  уже відоме), з третього -  $c_2$  ( $c_0, c_1$  уже відомі) і т.д.

Цей алгоритм можна подати у вигляді такої рекурентної формули:

$$c_z = \begin{cases} \frac{b}{a_n} & , \quad z = 0, \\ \frac{b - \sum_{s=0}^{z-1} a_s \cdot c_s}{a_n} & , \quad z \geq 1, \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\text{де } b = \begin{cases} b_{n-z} & , \text{ якщо } 0 \leq n-z \leq m, \\ 0 & , \text{ якщо } n-z < 0, \text{ або } n-z > m. \end{cases}$$

$$a = \begin{cases} a_{n-z+s} & , \text{ якщо } 0 \leq n-z+s \leq n, \\ 0 & , \text{ якщо } n-z+s < 0, \text{ або } n-z+s > n. \end{cases}$$

Оформимо розглянутий алгоритм у вигляді підпрограми DelPolNP:

```

procedure DelPolNP(B,A:Coef; k:integer; var C:Coef);
var Na,Nb,s,z:integer;
begin
  Na:=round(A[-1]); Nb:=round(B[-1]);
  C[-1]:=k;
  for z:=0 to k do begin
    if Na - z in [0..Nb]
      then C[z] := B[Na - Z]
      else C[z] := 0;
    for s := 0 to z - 1 do
      if n-z+s in [0..Na]
        then C[z]:=C[z]-A[N-z+s]*C[s];
      C[z]:=C[z]/A[Na]
    end
  end;
end;

```

Тут  $k$  – індекс старшого з коефіцієнтів  $c$ , тобто визначає задану довжину ряду  $c$ .

#### 4.5. Система заміщення для дробово-раціональної передаточної функції

Досі ми розглядали задачу визначення передаточної функції, наприклад, за системою диференціальних рівнянь першого порядку. Тепер розглянемо зворотню задачу, а саме: формування системи диференціальних рівнянь за передаточною функцією. Отже, нехай маємо:

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (4.33)$$

Якщо вважати, що вхідний сигнал досліджуваного каналу  $x$ , а вихідний –  $y$ , то динамічний зв'язок між  $x$  і  $y$  подамо у вигляді схеми заміщення:

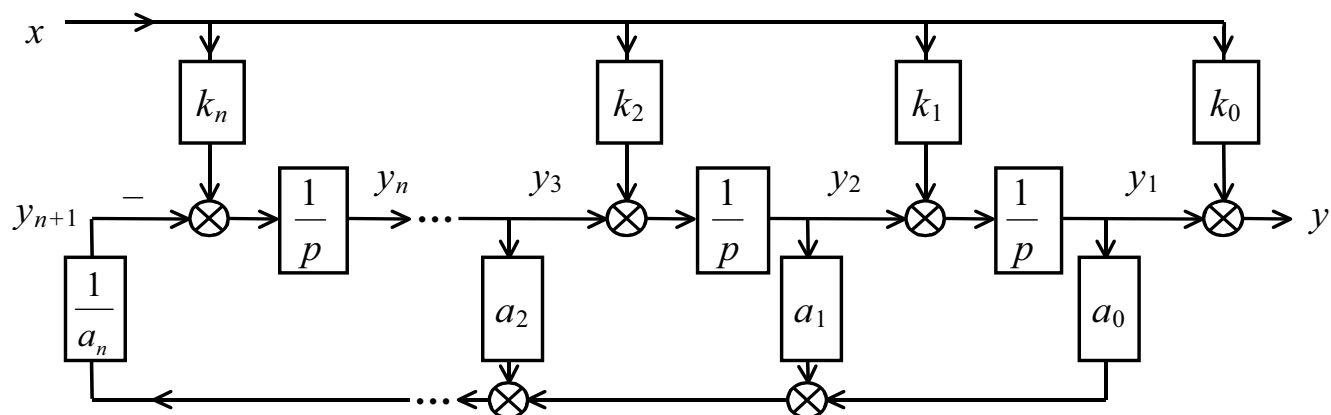


Рис.4.1. Схема заміщення для дробово-раціональної передаточної функції

Наведеній схемі заміщення відповідає система диференціальних рівнянь

$$y_z' = k_z x + y_{z+1}, \quad 1 \leq z \leq n, \tag{4.34}$$

де  $y_{n+1} = -\frac{1}{a_n} \sum_{s=0}^{n-1} a_s y_{s+1}$ .

Вихідний сигнал системи заміщення:

$$y = k_0 x + y_1. \tag{4.35}$$

Якщо виявиться, що система (4.34), (4.35) структурно еквівалентна передаточній функції (4.33) – а в цьому ще треба переконатись! – то задача буде зведена до підбору коефіцієнтів  $k_S, 0 \leq S \leq n$ , при яких би еквівалентність дійсно мала б місце.

Передаточній функції (4.33) відповідає диференціальне рівняння (далі для конкретності будемо вважати, що  $n = m = 3$ , в кінці результат узагальнимо на довільні значення  $n$  та  $m$ ):

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_0 y = b_3 x''' + b_2 x'' + b_1 x' + b_0 x. \tag{4.36}$$

Система заміщення в розгорнутому вигляді буде такою:

$$\begin{cases} y_1' = k_1 x + y_2, \\ y_2' = k_2 x + y_3, \\ y_3' = k_3 x + y_4, \end{cases} \tag{4.37}$$

де

$$y_4 = -\frac{1}{a_3} \sum_{s=0}^2 a_s y_{s+1} \quad (4.38)$$

а вихідний сигнал визначається формулою (4.35).

Визначимо  $y_1$  з (4.35) та підставимо його в перше рівняння системи (4.37), з одержаного рівняння визначимо  $y_2$  та підставимо його в друге рівняння системи (4.37) і т.д.

$$\begin{aligned} y_1 &= y - k_0 x, \\ y_2 &= y_1' - k_1 x = y' - k_0 x' - k_1 x, \\ y_3 &= y_2' - k_2 x = y'' - k_0 x'' - k_1 x' - k_2 x, \\ y_4 &= y_3' - k_3 x = y''' - k_0 x''' - k_1 x'' - k_2 x' - k_3 x. \end{aligned}$$

А тепер підставимо усе це в (4.36):

$$y''' - k_0 x''' - k_1 x'' - k_2 x' - k_3 x = -\frac{1}{a_3} [a_0 (y - k_0 x) + a_1 (y' - k_0 x' - k_1 x) + a_2 (y'' - k_0 x'' - k_1 x' - k_2 x)].$$

Множимо одержане рівняння на  $a_3$  та зводимо подібні:

$$\begin{aligned} a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y &= \\ = a_3 k_0 x''' + (a_3 k_1 + a_2 k_0) x'' + (a_3 k_2 + a_2 k_1 + a_1 k_0) x' + (a_3 k_3 + a_2 k_2 + a_1 k_1 + a_0 k_0) x. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Зіставляючи (4.39) з (4.36), пересвідчуємось у їх структурній відповідності. Еквівалентність матиме місце при виконанні умов

$$\begin{cases} a_3 k_0 = b_3, \\ a_3 k_1 + a_2 k_0 = b_2, \\ a_3 k_2 + a_2 k_1 + a_1 k_0 = b_1, \\ a_3 k_3 + a_2 k_2 + a_1 k_1 + a_0 k_0 = b_0. \end{cases} \quad (4.40)$$

Система (4.40) дозволяє послідовно визначати коефіцієнти  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . Узагальнюючи, одержуємо рекурентні формули

$$\begin{cases} k_0 = \frac{b_n}{a_n}, \\ k_z = \frac{b_{n-z} - \sum_{s=1}^z k_{s-1} a_{n-z+s-1}}{a_n}, \quad 1 \leq z \leq n. \end{cases} \quad (4.41)$$

Коефіцієнти системи заміщення за формулами (4.41) формує процедура SystZam.

```

procedure SystZam(B,A:Coef; var K:Coef);
var s,z,n,m:integer;
begin
  RedPol(0,A); RedPol(0,B); K[-1]:=n;
  n:=round(A[-1]); m:=round(B[-1]);
  if m<n then for s:=m+1 to n do B[s]:=0;
  K[0]:=B[n]/A[n];
  for z:=1 to n do
    begin
      K[z]:=B[n-z];
      for s:=1 to z do
        K[z]:=K[z]-K[s-1]*A[n-z+s-1];
      K[z]:=R[z]/A[n]
    end
  end;
end;

```

Тут процедура RedPol виконує редагування полінома, тобто видаляє з нього старші доданки, модуль яких не перевищує Eps.

```

procedure RePol(Eps:real; var A:Coef);
begin
  while abs(A[round(A[-1])])<Eps then A[-1]:=A[-1]-1
end;

```

Систему заміщення розглянутого типу зручно використовувати для чисельного інтегрування диференціальних рівнянь типу (4.36), особливо тоді, коли за наявності похідних від  $x$  у правій частині ми маємо функцію  $X$ , що має розриви чи то безпосередньо в  $X$ , чи то в його похідних.

## 4.6. Комп'ютерне визначення коефіцієнтів передаточної функції дискретної моделі теплоакумулюючої стінки

При математичному моделюванні динаміки систем автоматичного керування технологічних об'єктів часто доводиться мати справу з об'єктами з чітко вираженою просторовою розподіленістю параметрів. Точні передаточні функції подібних об'єктів є трансцендентними, що утруднює їх використання під час аналізу та синтезу системи. Апроксимація подібних передаточних функцій дробово-раціональними передаточними функціями породжує проблеми з вибором адекватної їх структури (порядку) та визначенням їх коефіцієнтів.

Разом із тим, добре розвинені на сьогоднішній день чисельні методи інтегрування диференціальних рівнянь в частинних похідних наштовхують на думку використовувати дискретну модель, яку покладено в основу чисельних методів, для пошуку апроксимуючої передаточної функції. Сам же алгоритм визначення передаточної функції може бути легко формалізований і реалізується на комп'ютері. Як приклад розглянемо апроксимацію динаміки теплоакумулюючої стінки.

Враховувати вплив теплоакумуляції в стінках на динаміку температури в об'єкті доводиться при дослідженні систем терморегулювання топочних пристроїв, печей для виробництва цементу, для випалювання цегли, глиняного та порцелянового посуду, печей для підігріву та відпалювання металу тощо [1, 3, 24].

Диференціальне рівняння теплопровідності для теплоакумулюючої стінки можна подати у вигляді

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{k_c}{r} \frac{\partial y}{\partial x} \right) + bf(x, t), \quad 0 \leq x \leq \delta, \quad (4.42)$$

де  $x$  - лінійний розмір, відраховується від "лівої" поверхні плоскої стінки або від внутрішньої поверхні циліндра чи кулі; якщо циліндр чи куля суцільні, то від осі чи, відповідно, центра;  $r_0, r_1$  - радіуси внутрішньої та зовнішньої поверхонь криволінійної стінки, для якої товщина стінки  $\delta = r_1 - r_0$ ;  $r$  - поточний радіус для криволінійної стінки ( $r = r_0 + x$ );  $t$  - час;  $y$  - температура (функція від  $t$  та  $x$ );  $k_c$  - коефіцієнт кривизни:

$$k_c = \begin{cases} 0 - \text{для плоскої стінки,} \\ 1 - \text{для циліндра,} \\ 2 - \text{для кулі.} \end{cases}$$

$a$  - коефіцієнт теплопровідності ( $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ , де  $\lambda, c$  - коефіцієнти теплопровідності та теплоємності;  $\rho$  - щільність матеріалу стінки);  $b = \frac{1}{\rho c}$  - коефіцієнт;  $f(x, t)$  - потужність тепловиділення (теплопоглинання) в одиниці об'єму стінки.

Оскільки мова далі йтиме про визначення передаточних функцій, то початкові умови будуть нульовими.

Розглянемо можливі варіанти граничних умов, спочатку для  $x=0$ , а потім для  $x = \delta$ . Номер граничної умови при  $x = 0$  будемо позначати як  $Ng1$ , при  $x = \delta$  - як  $Ngr$ .

Гранична умова I-го роду:

$$Ng1 = 1. \quad y \Big|_{x=0} = y^L(t), \quad (4.43)$$

де  $y^L(t)$  - температура поверхні при  $x = 0$ .

Гранична умова II-го роду:

$$Ng1 = 2. \quad q^L(t) - \left( -\lambda \frac{dy}{dx} \Big|_{x=h} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (h\rho c y) \Big|_{x=0}, \quad (4.44)$$

де  $q^L(t)$  - потужність теплового потоку через поверхню  $x=0$ ;  $h$  - товщина розрахункового шару.  $h = \delta / m$ ;  $m$  - кількість розрахункових шарів.

Гранична умова III-го роду:

$$Ng1 = 3. \quad \alpha_0 \left[ y^{S,L}(t) - y \Big|_{x=0} \right] - \left( -\lambda \frac{dy}{dx} \Big|_{x=h} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (h\rho c y), \quad (4.45)$$

де  $y^{S,L}(t)$  - температура теплоносія, що омиває поверхню  $x=0$ ;  $\alpha_0$  - коефіцієнт тепловіддачі від цього теплоносія до поверхні стінки.

Якщо стінка криволінійна і суцільна ( $r_0 = 0$ ), то за граничну умову береться умова температурної симетрії (відсутність теплового потоку через вісь чи центр).

$$Ngl = 0. \quad \lambda \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=h} = \frac{\partial}{\partial t} (h\rho cy) \Big|_{x=0}, \quad (4.46)$$

де  $Ngl = 0$  прийнято умовно.

Для другої поверхні  $x = \delta$  аналогічно:

$$Ngr = 1. \quad y \Big|_{x=\delta} = y^R(t), \quad (4.47)$$

де  $y^R(t)$  - температура поверхні  $x = \delta$ .

$$Ngr = 2. \quad -\lambda \frac{dy}{dx} \Big|_{x=\delta-h} - q^R(t) = \frac{\partial}{\partial t} (h\rho cy) \Big|_{x=\delta}, \quad (4.48)$$

де  $q^R(t)$  - потужність теплового потоку через одиницю поверхні  $x = \delta$ .

$$Ngr = 3. \quad -\lambda \frac{dy}{dx} \Big|_{x=\delta-h} - \alpha_1 \left[ y \Big|_{x=\delta} - y^{S,R}(t) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (h\rho cy) \Big|_{x=\delta}, \quad (4.49)$$

де  $y^{S,R}(t)$  - температура теплоносія, що омиває поверхню  $x = \delta$ ;  $\alpha_1$  - коефіцієнт тепловіддачі від цієї поверхні до теплоносія.

Якщо  $\delta \rightarrow \infty$ , то товщина шару  $h$  та кількість шарів  $m$  вибираються незалежно від  $\delta$ , і за граничну умову для  $m$ -го шару можна взяти відсутність теплового потоку через відповідну поверхню

$$Ngr = 8. \quad -\lambda \frac{dy}{dx} \Big|_{x=mh} = 0. \quad (4.50)$$

Будемо розглядати як можливі вхідні сигнали досліджуваного об'єкта:

$$y^L(t), q^L(t), y^{S,L}(t), y^R(t), q^R(t), y^{S,R}(t) \text{ та } f(x,t).$$

Домовимося нумерувати можливі входи таким чином:

$$Ninp = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y^L(t) \text{ є входом } (Ngl = 1), \\ 2, & \text{якщо } q^L(t) \text{ є входом } (Ngl = 2), \\ 3, & \text{якщо } y^{S,L}(t) \text{ є входом } (Ngl = 3), \\ 4, & \text{якщо } y^R(t) \text{ є входом } (Ngr = 1), \\ 5, & \text{якщо } q^R(t) \text{ є входом } (Ngr = 2), \\ 6, & \text{якщо } y^{S,R}(t) \text{ є входом } (Ngr = 3), \\ 7, & \text{якщо входом є інтенсивність тепловиділення} \\ & \text{в } x\text{-му шарі, тоді як в інших шарах воно відсутнє,} \\ 8, & \text{якщо входом є інтенсивність тепловиділення і} \\ & \text{це тепловиділення є функцією від } X. \end{cases}$$

Замінімо в диференціальному рівнянні (4.42) та граничних умовах (4.43) – (4.48) неперервну змінну  $x$  на її дискретний аналог  $s$  ( $x=sh$ ), а похідні за  $x$  різницевиими співвідношеннями [1, 24], де  $h$  - крок,  $s$  - номер кроку.

$$\frac{dy_Z}{dt} = D(y_{Z-1} - 2y_Z + y_{Z+1}) + R_Z(y_{Z+1} - y_{Z-1}) + b f(zh, t), \quad (4.51)$$

$$\text{де } D = a/h^2; \quad R_z = \frac{k_c D}{2 \left( \frac{R_0}{h} + z \right)}; \quad y_z = y \Big|_{x=zh}.$$

$$Ngl = 1. \quad y_0 = y^L(t); \quad (4.52)$$

$$Ngl = 2. \quad \frac{dy_0}{dt} = D(y_1 - y_0) + \frac{b}{h} q^L(t); \quad (4.53)$$

$$Ngl = 3. \quad \frac{dy_0}{dt} = D(y_1 - y_0) - b_0 y_0 + b_0 y^{S,L}(t), \quad (4.54)$$

$$\text{де } b_0 = \frac{\alpha_0}{h\rho c}.$$

$$Ngr = 0. \quad \frac{dy_0}{dt} = D(y_1 - y_0); \quad (4.55)$$

$$Ngr = 1. \quad y_m = y^R(t); \quad (4.56)$$

$$Ngr = 2. \quad \frac{dy_m}{dx} = D(y_{m-1} - y_m) - \frac{b}{h} q^R(t); \quad (4.57)$$

$$Ngr = 3. \quad \frac{dy_m}{dt} = D(y_{m-1} - y_m) - b_1[y_m - y^{S,R}(t)], \quad (4.58)$$

де  $b_1 = \frac{\alpha_1}{h\rho c}$ .

$$Ngr = 8. \quad y_m = y_{m-1}. \quad (4.59)$$

Виконаємо над (4.51)-(4.59) перетворення Лапласа (за нульових початкових умов) та надамо ненульовий приріст лише одному з можливих входів - саме тому, який є входом досліджуваного каналу (з номером  $Ninpr$ ). Після цього поділимо усі частини одержаних рівнянь на зображення входу з номером  $Ninpr$ .

З рівняння (4.59) одержимо:

$$-(D - R_z)W_{z-1}(p) + P(p)W_z(p) - (D + R_z)W_{z+1}(p) = k_z, \quad 1 \leq z \leq m-1, \quad (4.60)$$

де  $W_z(p)$  - передаточна функція каналу "вхід з номером  $Ninpr$  - вихід  $y_z$ ",

$$P(p) = p + 2D,$$

$$k_z = \begin{cases} b, & \text{якщо } (Ninpr = 7) \text{ та } (Z = Zinpr) \text{ або } (Ninpr = 8), \\ 0 & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases}$$

де  $Zinpr$  - номер шару, тепловиділення в якому є вхідним сигналом об'єкта.

Відомо [29], що в подібних об'єктах передаточні функції усіх каналів можуть бути подані у вигляді

$$W_z(p) = \frac{B_z(p)}{A(p)},$$

де  $A(p)$  - спільний для усіх передаточних функцій даного об'єкта знаменник (характеристичний поліном об'єкта).

Тоді рівняння (4.20) набуває вигляду:

$$-(D - R_z)B_{z-1}(p) + P(p)B_z(p) - (D + R_z)B_{z+1}(p) = K_z A(p), \quad 1 \leq z \leq m-1. \quad (4.61)$$

Система (4.61) є тридіагональною. Для її розв'язання скористаємось методом прогонки [22]. Особливістю цього методу в даному випадку буде те, що оперувати доведеться не з числами, а з поліномами від  $p$ . У процесі виконання прямого ходу будемо зводити  $z$ -те рівняння до такого вигляду

$$V_z(p)B_z(p) - U_z(p)B_{z+1}(p) = Q_z(p)A(p). \quad (4.62)$$

Тоді  $(z-1)$ -ше рівняння матиме вигляд

$$V_{z-1}(p)B_{z-1}(p) - U_{z-1}(p)B_z(p) = Q_{z-1}(p)A(p). \quad (4.63)$$

Множимо (4.61) на  $V_{z-1}(p)$ , а (4.63) - на  $(D-R_z)$ , після чого додаємо ці рівняння.

$$\begin{aligned} & [P_z(p)V_{z-1}(p) - (D - R_z)U_{z-1}(p)]B_z(p) - \\ & - (D + R_z)V_{z-1}(p)B_{z+1}(p) = [k_z V_{z-1}(p) + (D - R_z)Q_{z-1}(p)]A(p). \end{aligned}$$

Порівнюючи останній вираз з (4.62), доходимо висновку, що

$$\begin{cases} V_z(p) = P(p)V_{z-1}(p) - (D - R_z)U_{z-1}(p), \\ U_z(p) = (D + R_z)V_{z-1}(p), \\ Q_z(p) = k_z V_{z-1}(p) + (D - R_z)Q_{z-1}(p). \end{cases} \quad 1 \leq z \leq m-1. \quad (4.64)$$

Формули (4.64) можна розглядати як рекурентні. Для того, щоб почати ними користуватись, необхідно з граничної умови для  $x = 0$  визначити:

$$V_0(p), \quad U_0(p) \quad \text{та} \quad Q_0(p).$$

Розглянемо, як це можна зробити.

Ng1=1. З (4.52) маємо:

$$B_0(p) = \begin{cases} A(p), & \text{якщо } Nip = 1, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Порівнюючи останній вираз з (4.62) при  $z = 0$ , доходимо висновку, що можна прийняти:

$$\begin{cases} V_0(p) = 1, \\ U_0(p) = 0, \\ Q_0(p) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Nip = 1, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{cases} \quad (4.65)$$

Ng1=2. З (4.53) маємо:

$$(p + D)B_0(p) - DB_1(p) = \begin{cases} \frac{b}{h} A(p), & \text{якщо } Nip = 2, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Порівнюємо останній вираз з (4.62) при  $z = 0$ .

$$\begin{cases} V_0(p) = p + D, \\ U_0(p) = D, \\ Q_0(p) = \begin{cases} b/h, & \text{якщо } N_{inp} = 2, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{cases} \quad (4.66)$$

Для  $N_{gl}=3$  з (13) маємо:

$$(p + D + b_0)B_0(p) - D \cdot B_1(p) = \begin{cases} b_0 A(p), & \text{якщо } N_{inp} = 3, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} V_0(p) = p + D + b_0, \\ U_0(p) = D, \\ Q_0(p) = \begin{cases} b_0, & \text{якщо } N_{inp} = 3, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{cases} \quad (4.67)$$

Якщо ж  $N_{gl}=0$ , то з (4.55) маємо:

$$\begin{cases} V_0(p) = p + D, \\ U_0(p) = D, \\ Q_0(p) = 0. \end{cases} \quad (4.68)$$

Маючи  $V_0(p)$ ,  $U_0(p)$  та  $Q_0(p)$ , одержані з (4.65) – (4.67) чи (4.68), обчислюємо  $V_z(p)$ ,  $U_z(p)$ ,  $Q_z(p)$  за формулами (4.64), послідовно перебираючи  $z=1,2,\dots, m-1$ .

При  $z=m-1$  матимемо з (4.62):

$$V_{m-1}(p)B_{m-1}(p) - U_{m-1}(p)B_m(p) = Q_{m-1}(p)A(p). \quad (4.69)$$

Скористаємося тепер граничними умовами для  $x = \delta$ .

$N_{gr}=1$ . Згідно з (4.56) маємо:

$$B_m(p) = \begin{cases} A(p), & \text{якщо } N_{inp} = 4, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Але ж  $A(p)$  нам поки що невідоме. Отже, підставимо останній вираз у (4.69),

звідки

$$B_{m-1}(p) = \frac{Q_{m-1}(p) + \begin{cases} U_{m-1}(p), & \text{якщо } N_{inp} = 4, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках} \end{cases}}{V_{m-1}(p)} A(p).$$

Можна прийняти, що:

$$\begin{cases} A(p) = V_{m-1}(p), \\ B_{m-1}(p) = Q_{m-1}(p) + \begin{cases} U_{m-1}(p), & \text{якщо } N_{inr} = 4, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases} \\ B_m(p) = \begin{cases} V_{m-1}(p), & \text{якщо } N_{inr} = 4, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{cases} \quad (4.70)$$

Ngr=2. Згідно з (4.57) маємо:

$$(p + D)B_m(p) - DB_{m-1}(p) = \begin{cases} -\frac{b}{h} A(p), & \text{якщо } N_{inr} = 5, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо визначити  $B_{m-1}(p)$  з (4.69) і підставити його в останній вираз, то одержимо:

$$B_m(p) = \frac{DQ_{m-1}(p) - \begin{cases} \frac{b}{h} V_{m-1}(p), & \text{якщо } N_{inr} = 5, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках} \end{cases}}{(p + D)V_{m-1}(p) - DU_{m-1}(p)} A(p).$$

Отже, можна прийняти, що

$$\begin{cases} B_m(p) = DQ_{m-1}(p) - \begin{cases} b/h \cdot V_{m-1}(p), & \text{якщо } N_{inr} = 5, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases} \\ A(p) = (p + D)V_{m-1}(p) - DU_{m-1}(p). \end{cases} \quad (4.71)$$

Ngr=3. Формула (4.58) дає:

$$(p + D + b_1) B_m(p) - DB_{m-1}(p) = \begin{cases} b_1 A(p), & \text{якщо } N_{inr} = 6, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Підставляємо  $B_{m-1}(p)$  з (4.69) в останній вираз та розв'язуємо його відносно  $B_m(p)$ .

$$B_m(p) = \frac{DQ_{m-1}(p) + \begin{cases} b_1 V_{m-1}(p), & \text{якщо } N_{inr} = 6, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках} \end{cases}}{(p + D + b_1) V_{m-1}(p) - DU_{m-1}(p)} A(p).$$

Приймаємо:

$$\begin{cases} B_m(p) = DQ_{m-1}(p) + \begin{cases} b_1 V_{m-1}(p), & \text{якщо } N_{inr} = 6, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases} \\ A(p) = (p + D + b_1) V_{m-1}(p) - DU_{m-1}(p). \end{cases} \quad (4.72)$$

При  $Ngr=8$  з (4.59) маємо:  $B_m(p) = B_{m-1}(p)$ .

Отже, з (4.69) випливає, що в цьому випадку:

$$B_m(p) = \frac{Q_{m-1}(p)}{V_{m-1}(p) - U_{m-1}(p)} A(p),$$

звідки

$$\begin{cases} B_m(p) = Q_{m-1}(p), \\ A(p) = V_{m-1}(p) - U_{m-1}(p). \end{cases} \quad (4.73)$$

Тепер, коли визначені  $A(p)$  та  $B_m(p)$ , можна скористатись формулою (4.63), розв'язуючи її відносно  $B_z(p)$ :

$$B_z(p) = \frac{Q_z(p)A(p) + U_z(p)B_{z+1}(p)}{V_z(p)}. \quad (4.74)$$

За цією формулою реалізується зворотний хід методу прогонки, починаючи з  $Z_n=(m-1)$  при  $Ngr=2,3,8$  або від  $Z_n=(m-2)$ , коли  $Ngr=1$ . Розглянутий алгоритм реалізується у вигляді підпрограми `WpTAST` на Турбо Паскалі.

```

procedure WpTAST(Kc, Ngl, Ngr, Ninp, m: integer;
var Ap: Coef; var Bp: CoefC);
  z, Zn: integer;
  A, D, B, Hx, B0, B1: real;
  R, k, F, p: Coef;
begin
  if Kc > 0 then Delta := R1 - R0;
  Hx := Delta / m; A := Lam / (Ro * C); D := A / sqrt(Hx);
  B := 1 / (Ro * C); B0 := A0 / (Hx * Ro * C); B1 := A1 / (Hx * Ro * C);
  for z := 1 to m do
    if Kc = 0 then R[z] := 0
      else R[z] := Kc * D / (2 * (Ro / Hx + z));
  Q[0, -1] := 0; Q[0, 0] := 0; V[0, -1] := 0; U[0, -1] := 0;
  case Ngl of
    0: begin
      V[0, 0] := D; V[0, 1] := 1; U[0, 0] := D; Q[0, 0] := 0;
    end;
    1: begin
      V[0, 0] := 1; U[0, 0] := 0;
      if Ninp = 1 then Q[0, 0] := 1;
    end;
    2: begin
      V[0, 0] := D; V[0, 1] := 1; U[0, 0] := D;
      if Ninp = 2 then Q[0, 0] := B / Hx;
    end;
  end;
end;

```

```

3: begin
    V[0,0]:=D+B0; V[0,1]:=1; U[0,0]:=D;
    if Ninp=3 then Q[0,0]:=B0
    end
end;
for z:=1 to m-1 do
begin
    P[-1]:=1; P[0]:=2*D; P[1]:=1; UmnPol(P,V[z-1],P);
    F[-1]:=0; F[0]:=D-R[z]; UmnPol(F,U[z-1],F);
    AlSumPol(P,F,'-',V[z]); F[-1]:=0; F[0]:=D+R[z];
    UmnPol(F,V[z-1],U[z]); K[-1]:=0; K[0]:=0;
    if ((Ninp=7) and (Z=Zinp)) or (Ninp=8) then K[0]:=B;
    UmnPol(K,V[z-1],Q[z]); F[-1]:=0; F[0]:=D-R[z];
    UmnPol(F,Q[z-1],F); AlSumPol(Q[z],F,'+',Q[z])
end;
Zn:=m-1;
case Ngr of
1: begin
    Ap:=V[m-1]; Bp[m-1]:=Q[m-1];
    if Ninp=4 then
        AlSumPol(Bp[m-1],U[m-1],'+',Bp[m-1]);
    Bp[m,-1]:=0; Bp[m,0]:=0; Zn:=m-2;
    if Ninp=4 then Bp[m]:=V[m-1]
    end;
2: begin
    P[-1]:=1; P[0]:=D; P[1]:=1; UmnPol(P,V[m-1],Ap);
    F[-1]:=0; F[0]:=D; UmnPol(F,U[m-1],F);
    AlSumPol(Ap,F,'-',Ap);
    F[-1]:=0; F[0]:=D; UmnPol(F,Q[m-1],Bp[m]);
    if Ninp=5 then
        begin
            F[-1]:=0; F[0]:=B/Hx; UmnPol(F,V[m-1],F);
            AlSumPol(Bp[m],F,'-',Bp[m])
        end
    end;
3: begin
    P[-1]:=1; P[0]:=D+B1; P[1]:=1;
    UmnPol(P,V[m-1],Ap);
    F[-1]:=0; F[0]:=D; UmnPol(F,U[m-1],F);
    AlSumPol(Ap,F,'-',Ap); F[-1]:=0; F[0]:=D;
    UmnPol(F,Q[m-1],Bp[m]);
    if Ninp=6 then
        begin
            F[-1]:=0; F[0]:=B1; UmnPol(F,V[m-1],F);
            AlSumPol(Bp[m],F,'-',Bp[m])
        end;
end;
end;
end;

```

```

8: begin
    AlSumPol (V[m-1], U[m-1], '-', Ap); Bp[m] := Q[m-1]
end
end;
for z:=Zn downto 0 do
begin
    UmnPol (Q[z], Ap, P); UmnPol (U[z], Bp[z+1], F);
    AlSumPol (P, F, '+', Bp[z]); DelPol (Bp[z], V[z], Bp[z], F)
end;
end;

```

Практика використання розглянутого алгоритму показує його безвідмовність, високу швидкодію, зручність у користуванні. Точність апроксимації легко регулюється величиною  $m$ .

Розглянутий алгоритм наближеного моделювання може легко бути застосований і для інших динамічних об'єктів з розподіленими параметрами, як, наприклад, трубчастих теплообмінників, об'єктів, що описуються хвильовим рівнянням та іншими типами рівнянь у частинних похідних.

#### 4.7. Комп'ютерне визначення передаточних функцій дискретної моделі струнного підвісу приладів

Математична модель струнного підвісу ряду навігаційних приладів може бути подана у вигляді хвильового рівняння (як перше наближення) і більш повно - у вигляді рівняння динаміки важкої нитки, навантаженої одним (на вільному кінці) або кількома тягарями [36, 40].

Ці два рівняння можуть бути зведені в одне:

$$m(x) \frac{\partial^2 y_z}{\partial t^2} + R(x) \frac{\partial y_z}{\partial t} = T(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (4.75)$$

де  $x$ ,  $t$  - лінійний розмір та час;  $y$  - відхилення точки підвісу від її положення рівноваги;  $m(x)$ ,  $R(x)$  та  $T(x)$  - відповідно маса, коефіцієнт опору рухові та натяг нитки.

Для струни (хвильове рівняння) натяжіння вважається константою, а для нитки натяг в кожній точці дорівнює сумі мас, розташованих під даною точкою,

помноженій на  $g$  - прискорення земного тяжіння.  $f(x,t)$  - зовнішня (поперечна) сила, що діє на підвіс.

Аналітичні (точні) розв'язки даної задачі відомі, але вони надзвичайно громіздкі, щоб їх можна було використовувати в інженерних розрахунках динаміки приладів, а тим більше, більш складних технічних систем. Тому становить інтерес пошук наближеної моделі, наприклад, у вигляді дробово-раціональної передаточної функції окремого каналу чи, можливо, ряду каналів в подібному об'єкті.

Для цього динамічну модель підвісу будемо подавати як сукупність зосереджених мас ("бусинок"), з'єднаних між собою невагомими нерозтяжними нитками. Відстань  $h$  між сусідніми бусинками є сталою  $h=l/m$ , де  $l$ -довжина струни,  $m$  - кількість відрізків, на стиках яких розміщуються бусинки. Масу нитки рівномірно розподіляємо між бусинками ( $m_z=m_{\text{стр}}/m$ ,  $1 \leq z \leq m-1$ ). Тут  $m_z$  - маса  $z$ -ї бусинки,  $m_{\text{стр}}$  - маса усієї струни. Бусинкам на кінцях струни надаємо маси  $m_0=m_m=m_z/2$ . За такої умови сумарна маса струни буде якраз дорівнювати сумі мас бусинок. Якщо на струні фіксується довільна кількість зосереджених мас будь-якої величини, то їх маси додаються до мас відповідних бусинок. Остаточний розподіл мас між бусинками фіксується масивом `Mb:Coef (type Coef=array[-1..30] of real)` [29, 43].

	-1	0	1	2	3	...	M	...	30
Mb	m	m <sub>0</sub>	m <sub>1</sub>	m <sub>2</sub>	m <sub>3</sub>	...	m <sub>m</sub>		

Сили опору рухові відтворюються масивом `Mg` такої ж структури, як і масив `Mb`. На  $z$ -ту бусинку діє сила, яка дорівнює силі опору, прикладеній до відрізка підвісу довжиною  $h$ . Якщо ж на підвісі фіксовані маси з ненульовими розмірами, то опір, викликаний наявністю цих мас, відображається відповідним збільшенням елементів масиву `Mg`.

Масив `T:Coef` заповнюється значеннями натягу (константа для моделі струни або, як згадувалось вище, - для моделі нитки).

Дискретна модель підвісу набуває вигляду

$$m_z \frac{d^2 y_z}{dt^2} + R_z \frac{dy_z}{dt} = D_z y_{z-1} - (D_z + D_{z+1}) y_z + D_{z+1} y_{z+1} + f_{xt}(zh, t), \quad 1 \leq z \leq m-1, \quad (4.76)$$

де  $D_z = T_s / h^2$  (далі користуватимемось масивом `D:Coef`).

Граничні умови будемо розглядати трьох родів ( $N_{gl}=1,2,3$  для  $x=0$ ;  $N_{gr}=1,2,3$  для  $x=l$ ).

Для лівого кінця ( $x=0$ ):

$$N_{gl} = 1; \quad y_0 = y^L(t), \quad (4.77)$$

де  $y^L(t)$  - переміщення точки підвісу  $x=0$ .

$$N_{gl} = 2; \quad m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} = f^L(t) + D_1(y_1 - y_0) - R_0 \frac{dy_0}{dt}, \quad (4.78)$$

де  $f^L(t)$  - сила, прикладена в точці  $x=0$ .

$$N_{gl} = 3; \quad m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} = C_0[y_k^L(t) - y_0] + D_1(y_1 - y_0) - R_0 \frac{dy_0}{dt}, \quad (4.79)$$

де  $C_0$  - коефіцієнт жорсткості пружини, один кінець якої приєднано до підвісу в точці  $x=0$ , а інший переміщується на величину  $y_k^L(t)$ .

Для правого кінця ( $x=l$ )

$$N_{gr} = 1; \quad y_m = y^R(t), \quad (4.80)$$

де  $y^R(t)$  - переміщення точки підвісу  $x=l$ .

$$N_{gr} = 2; \quad m_m \frac{d^2 y_m}{dt^2} = f^R(t) + D_m(y_{m-1} - y_m) - R_m \frac{dy_m}{dt}, \quad (4.81)$$

де  $f^R(t)$  - сила, що діє на точку  $x=l$ .

$$N_{gr} = 3; \quad m_m \frac{d^2 y_m}{dt^2} = C_1[y_k^R(t) - y_m] + D_m(y_{m-1} - y_m) - R_m \frac{dy_m}{dt}, \quad (4.82)$$

де  $C_1$  - жорсткість пружини, один кінець якої приєднано до підвісу в точці  $x=l$ , а інший зміщується на величину  $y_k^R(t)$ .

Оскільки математична модель формується нами для визначення передаточної функції будь-якого каналу, то залежно від вибраного каналу відповідний збурюючий чинник (вхідний сигнал) вважається наявним. Усі ж інші беруться рівними нулю.

Щоб формалізувати завдання вхідної точки потрібної групи (віяла) каналів, домовимося нумерувати вхідні сигнали таким чином:

$$N_{inp} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y^L(t) \text{ є входом } (Ngl = 1), \\ 2, & \text{якщо } f^L(t) \text{ є входом } (Ngl = 2), \\ 3, & \text{якщо } y_k^L(t) \text{ є входом } (Ngl = 3), \\ 4, & \text{якщо } y^R(t) \text{ є входом } (Ngr = 1), \\ 5, & \text{якщо } f^R(t) \text{ є входом } (Ngr = 2), \\ 6, & \text{якщо } y_k^R(t) \text{ є входом } (Ngr = 3), \\ 7, & \text{якщо } f_{xt}(z_{inp}, t) \text{ є входом, тобто входом} \\ & \text{є сила, прикладена тільки до } z_{inp} - \text{ї бусинки,} \\ 8, & \text{якщо входом є } f(z, t) = f_1(z)f_2(t) - \text{сила, прикладена одночасно} \\ & \text{до усіх бусинок.} \end{cases}$$

Виконуємо над (4.76) перетворення Лапласа при нульових початкових умовах та ділимо кожен член на зображення вхідного сигналу

$$-D_z W_{z-1}(p) + P_z(p)W_z(p) - D_{z+1}W_{z+1}(p) = K_z, \quad 1 \leq z \leq m-1, \quad (4.83)$$

де  $P_z(p) = m_z p^2 + R_z p + D_z + D_{z+1}$ ;

$$K_z = \begin{cases} 1, & \text{якщо } ((N_{inp} = 7) \text{ та } (Z = Z_{inp})) \\ & \text{або } (N_{inp} = 8) \text{ та } \text{рівномірно розподілена сила,} \\ f_1(z), & \text{якщо } (N_{inp} = 8), \\ 0 & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases}$$

де  $W_z(p)$  - передаточна функція каналу “вхід з номером  $N_{inp}$  - вихід з номером  $z$ ”.

Відомо [2], що в динамічних об’єктах передаточні функції усіх каналів можуть мати такий вигляд:

$$W_z(p) = \frac{B_z(p)}{A(p)}, \quad (4.84)$$

де  $A(p)$ - спільний для усіх передаточних функцій даного об’єкта знаменник (характеристичний поліном об’єкта).

Множимо (4.9) на  $A(p)$ , одержуємо:

$$-D_z B_{z-1}(p) + P_z(p)B_z(p) - D_{z+1}B_{z+1}(p) = K_z A(p), \quad 1 \leq z \leq m-1. \quad (4.85)$$

Система (4.85) є тридіагональною. Для її розв’язання скористаємось методом прогонки [22], особливістю якого буде те, що оперувати доведеться не з числами, а з

поліномами від  $p$ . У процесі виконання прямого ходу будемо зводити  $z$ -те рівняння до такого вигляду:

$$V_z(p)B_z(p) - U_z(p)B_{z+1}(p) = Q_z(p)A(p). \quad (4.86)$$

Тоді  $(z-1)$ -е рівняння матиме вигляд

$$V_{z-1}(p)B_{z-1}(p) - U_{z-1}(p)B_z(p) = Q_{z-1}(p)A(p). \quad (4.87)$$

Множимо (4.85) на  $V_{z-1}(p)$ , а (4.87) на  $D_z$ , після чого додаємо ці рівняння.

$$\begin{aligned} [P_z(p)V_{z-1}(p) - D_z U_{z-1}(p)]B_z(p) - D_{z+1}V_{z-1}(p)B_z(p) = \\ = [k_z V_{z-1}(p) + D_z Q_{z-1}(p)]A(p). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Порівнюючи (4.86) з (4.88), робимо висновок, що

$$\begin{cases} V_z(p) = P_z(p)V_{z-1}(p) - D_z U_{z-1}(p), \\ U_z(p) = D_{z+1}V_{z-1}(p), \\ Q_z(p) = K_z V_{z-1}(p) + D_z Q_{z-1}(p). \end{cases} \quad 1 \leq z \leq m-1. \quad (4.89)$$

Формули (4.89) можна розглядати як рекурентні. Але для того, щоб вони «запрацювали», необхідно з лівої граничної умови визначити

$$V_0(p), \quad U_0(p) \quad \text{та} \quad Q_0(p).$$

Розглянемо, як це можна зробити. Якщо над (4.77) ( $N_{gl}=1$ ) виконати перетворення Лапласа, поділити на зображення вхідного сигналу і помножити на  $A(p)$ , то одержимо

$$B_0(p) = \begin{cases} A(p), & \text{якщо } N_{inp} = 1, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases}$$

звідки, порівнюючи останній вираз з (4.86) при  $z=0$ , можемо прийняти

$$\begin{cases} V_0(p) = 1, \\ U_0(p) = 0, \\ Q_0(p) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } N_{inp} = 1, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{cases} \quad (4.90)$$

Для  $N_{gl}=2$  з (4.78) аналогічно маємо

$$(m_0 p^2 + R_0 p + D_1)B_0(p) = D_1 B_1(p) \begin{cases} 1, & \text{якщо } N_{inp} = 2, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Порівнюючи останній вираз з (4.86) при  $z=0$ , доходимо висновку, що:

$$\begin{cases} V_0(p) = m_0 p^2 + R_0 p + D_1, \\ U_0(p) = D_1, \\ Q_0(p) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } N_{inp} = 2, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{cases} \quad (4.91)$$

При  $N_{gl}=3$  з (4.79) маємо:

$$(m_0 p^2 + R_0 p + C_0 + D_1)B_0(p) = D_1 B_1(p) \begin{cases} C_0 A(p), & \text{якщо } N_{inp} = 3, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Порівнюємо останній вираз з (4.86) при  $z=0$ .

$$\begin{cases} V_0(p) = m_0 p^2 + R_0 p + C_0 + D_1, \\ U_0(p) = D_1, \\ Q_0(p) = \begin{cases} C_0, & \text{якщо } N_{inp} = 3, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{cases} \quad (4.92)$$

Тепер прямий хід може бути виконаний за формулами (4.89). При  $z=m-1$  матимемо з (4.86)

$$V_{m-1}(p)B_{m-1}(p) - U_{m-1}(p)B_m(p) = Q_{m-1}(p)A(p). \quad (4.93)$$

Щоб знайти  $B_m(p)$ , доповнимо рівняння (4.93) граничною умовою при  $x=l$   $N_{gr}=1$ . Згідно з (4.80) маємо:

$$B_m(p) = \begin{cases} A(p), & \text{якщо } N_{inp} = 4, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \quad (4.94)$$

Підставимо  $B_m(p)$  з останнього виразу в (4.93) і розв'яжемо останнє відносно  $B_{m-1}(p)$

$$B_{m-1}(p) = \frac{Q_{m-1}(p) + \begin{cases} U_{m-1}(p), & \text{якщо } N_{inp} = 4, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}}{V_{m-1}(p)} A(p).$$

Отже, можемо прийняти, що:

$$\begin{cases} B_{m-1}(p) = Q_{m-1}(p) + \begin{cases} U_{m-1}(p), & \text{якщо } N_{inp} = 4, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases} \\ A(p) = V_{m-1}(p). \end{cases} \quad (4.95)$$

Ngf=2. Згідно з (4.81) одержимо:

$$(m_m p^2 + R_m p + D_m) B_m(p) - D_m B_{m-1}(p) = \begin{cases} A(p), & \text{якщо } N_{inp} = 5, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо визначити  $B_{m-1}(p)$  з останнього виразу та підставити його в (4.93), то одержимо

$$B_m(p) = \frac{D_m Q_{m-1}(p) + V_{m-1}(p) \begin{cases} 1, & \text{якщо } N_{inp} = 5, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках} \end{cases}}{(m_m p^2 + R_m p + D_m) V_{m-1}(p) - D_m U_{m-1}(p)} A(p).$$

Отже, можна прийняти, що

$$\begin{cases} B_m(p) = D_m Q_{m-1}(p) + V_{m-1}(p) \begin{cases} 1, & \text{якщо } N_{inp} = 5, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \\ A(p) = (m_m p^2 + R_m p + D_m) V_{m-1}(p) - D_m U_{m-1}(p). \end{cases} \quad (4.96)$$

Гранична умова Ngf=3. Згідно з (4.82):

$$(m_m p^2 + R_m p + C_1 + D_m) B_0(p) - D_m B_{m-1}(p) = \begin{cases} C_1 A(p), & \text{якщо } N_{inp} = 6, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Підставляємо  $B_{m-1}(p)$  з останнього виразу в (19), звідки

$$\begin{cases} B_m(p) = D_m Q_{m-1}(p) + \begin{cases} C_1 V_{m-1}(p), & \text{якщо } N_{inp} = 6, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases} \\ A(p) = V_{m-1}(p)(m_m p^2 + R_m p + C_1 + D_m) - D_m U_{m-1}(p). \end{cases}$$

На цьому прямий хід в методі прогонки завершується.

Зворотний хід реалізується з використанням формули (4.86), яка зводиться до вигляду

$$B_z(p) = \frac{Q_z(p) A(p) + U_z(p) B_{z+1}(p)}{V_z(p)}.$$

Z перебирається, починаючи з (m-2), якщо  $N_{inp}=4$ , або з (m-1) - в інших випадках, завершується ж на  $Z=0$ .

Оформлюємо описаний алгоритм у вигляді підпрограми WpStrNit.

```
procedure WpStrNit (Mb, Mr, D:Coef; Ninp:integer; var A:Coef;
var
      B:CoefC);
```

```

var s,z,Zn:integer;
    k,F,p:Coef;
begin
  U[0,-1]:=0; Q[0,-1]:=0; Q[0,0]:=0;
  case Ngl of
    1: begin
        V[0,-1]:=0; V[0,0]:=1; U[0,0]:=0;
        if Ninp=1 then Q[0,0]:=1
        end;
    2: begin
        V[0,-1]:=2; V[0,0]:=D[1]; U[0,0]:=D[1];
        V[0,1]:=Mr[0]; V[0,2]:=Mb[0];
        if Ninp=2 then Q[0,0]:=1
        end;
    3: begin
        V[0,-1]:=2; V[0,0]:=C0+D[1]; U[0,0]:=D[1];
        if Ninp=3 then Q[0,0]:=C0
        end
  end;
end;
for z:=1 to m-1 do
  begin
    P[-1]:=2; P[0]:=D[z]+D[z+1]; P[1]:=Mr[z]; P[2]:=Mb[z];
    UmnPol(P,V[z-1],P); F[-1]:=0; F[0]:=D[z];
    UmnPol(F,U[z-1],F);
    AlSumPol(P,F,'-',V[z]); F[-1]:=0; F[0]:=D[z+1];
    UmnPol(F,V[z-1],U[z]); K[-1]:=0; K[0]:=0;
    if ((Ninp=7) and (Z=Zinp)) or (Ninp=8) then K[0]:=1;
    if Ninp=8 then K[0]:=F1[z];
    F[-1]:=0; F[0]:=D[z];
    UmnPol(K,V[z-1],P);
    UmnPol(F,Q[z-1],F); AlSumPol(P,F,'+',Q[z]);
  end;
case Ngr of
  1: begin
        A:=V[m-1]; B[m]:=A; B[m-1]:=Q[m-1];
        if Ninp=4 then AlSumPol(B[m-1],U[m-1],'+',B[m-1]);
        end;
  2: begin
        F[1]:=0; F[0]:=D[m]; UmnPol(F,Q[m-1],B[m]);
        if Ninp=5 then AlSumPol(B[m],V[m-1],'+',B[m]);
        P[-1]:=2; P[0]:=D[m]; P[1]:=Mr[m]; P[2]:=Mb[m];
        UmnPol(P,V[m-1],P);
        F[-1]:=0; F[0]:=D[m]; UmnPol(F,U[m-1],F);
        AlSumPol(P,F,'-',A)
        end;
  3: begin
        F[-1]:=0; F[0]:=D[m];

```

```

UmnPol (F, Q[m-1], B[m]);
if Ninp=6 then
  begin
    P[-1]:=0; P[0]:=C1; UmnPol (P, V[m-1], P);
    AlSumPol (B[m], P, '+', B[m])
  end;
  P[-1]:=2; P[0]:=D[m]+C1; P[1]:=Mr[m]; P[2]:=Mb[m];
  UmnPol (P, V[m-1], A); F[-1]:=0; F[0]:=D[m];
  UmnPol (F, U[m-1], F); AlSumPol (A, F, '-', A)
end;
end;
if Ninp=4 then Zn:=m-2 else Zn:=m-1;
for z:=Zn downto 0 do
  begin
    UmnPol (Q[z], A, P); UmnPol (U[z], B[z+1], F);
    AlSumPol (P, F, '+', P); DelPol (P, V[z], B[z], F)
  end;
end;
end;

```

#### 4.8. Комп'ютерна ідентифікація об'єкта за його реакцією на відомий вхідний сигнал

Створення зручної для подальшого використання математичної моделі окремого елемента динамічної системи чи довільної групи її елементів, може базуватися на використанні даних фізичного чи математичного експерименту. Так, наприклад, можна зіставити вхідний та вихідний сигнал досліджуваного каналу, синхронно зафіксовані на протязі достатньо довгого часу. Більшість існуючих методів ідентифікації, що використовують загальний підхід, базується на ідеї забезпечення рівності розрахованого на базі моделі вихідного сигналу, та сигналу, що спостерігається на виході об'єкта в ряді заданих моментів часу. Такий підхід дає збої при неповній відповідності апроксимуючої структури динамічним властивостям досліджуваного каналу, а також за наявності суттєвих похибок в сигналах, що співставляються.

Підвищити стійкість проти збурюючих чинників можна шляхом використання методу найменших квадратів з його здатністю згладжувати можливі похибки у вхідних даних.

Будемо шукати апроксимуючу передаточну функцію у вигляді:

$$W(p) = \frac{b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + 1}, \quad (4.97)$$

якій відповідає диференціальне рівняння:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + y = b_n x^{(n)} + \dots + b_1 x' + b_0 x. \quad (4.98)$$

Будемо вважати, що функції  $x(t)$  та  $y(t)$  задані масивами  $X, Y$ : CoefR їх ординат наступної структури:

	-1	0	1	2	3	...	$m$
$X$	$m$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_m$
	-1	0	1	2	3	...	$M$
$Y$	$h$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_m$

де type CoefR=array[-1.. Mmax] of real;  $h$  - крок за часом,  $h = D/m$ ;  $D$  - час спостереження сигналів  $x(t)$  та  $y(t)$ ;  $m$  - кількість кроків за часом.

За показник якості ідентифікації прийmemo функцію:

$$E_0 = \sum_{i=0}^m \left[ a_n y_i^{(n)} + \dots + a_1 y_i' + y_i - b_n x_i^{(n)} - \dots - b_1 x_i' - b_0 x_i \right]^2. \quad (4.99)$$

Індекс  $i$  означає, що відповідна функція визначається в точці  $t = ih$ .

Прирівнюючи до нуля похідні від  $E_0$  відносно коефіцієнтів  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ , одержимо систему рівнянь, розв'язком якої і будуть шукані коефіцієнти структури (4.97). Але ж, як ми відзначили вище, сигнали  $x(t)$  та  $y(t)$  можуть мати похибки, в тому числі високочастотні. А це може різко погіршувати точність визначення похідних, присутніх в формулі (4.99), особливо похідних високих порядків. Результатом буде погіршення якості ідентифікації.

Вплив високочастотних “шумів” можна спробувати ослабити шляхом  $k$  послідовних інтегрувань ( $0 \leq k \leq n$ ) рівняння (4.98) за часом  $t$  в межах від 0 до  $t$ .

Тоді рівняння (4.98) предстане у вигляді:

$$\sum_{z=1}^n a_z e_z(t) + \sum_{z=0}^n b_z f_z(t) + g(t) = 0, \quad (4.100)$$

де

$$\left. \begin{aligned} e_z(t) &= \begin{cases} \int_0^t \dots \int_0^t y dt^{k-z} - \sum_{s=0}^{z-1} y_0^{(s)} \frac{t^{(k-z+s)}}{(k-z+s)!}, & 1 \leq z \leq k-1, \\ y^{(z-k)} - \sum_{s=0}^{k-1} y_0^{(z-k+s)} \frac{t^s}{s!}, & k \leq z \leq n, \end{cases} \\ f_z(t) &= \begin{cases} \sum_{s=0}^{z-1} x_0^{(s)} \frac{t^{(k-z+s)}}{(k-z+s)!} - \int_0^t \dots \int_0^t x dt^{k-z}, & 0 \leq z \leq k-1, \\ \sum_{s=0}^{k-1} x_0^{(z-k+s)} \frac{t^s}{s!} - x^{(z-k)}, & k \leq z \leq n, \end{cases} \\ g(t) &= \int_0^t \dots \int_0^t y dt^k. \end{aligned} \right\} \quad (4.101)$$

Тут використано позначення

$$y_0^{(0)} = y|_{t=0}; \quad y_0^{(s)} = \left. \frac{d^s y}{dt^s} \right|_{t=0};$$

$$x_0^{(0)} = x|_{t=0}; \quad x_0^{(s)} = \left. \frac{d^s x}{dt^s} \right|_{t=0}.$$

Для рівняння (4.100) за показник якості ідентифікації візьмемо:

$$E = \sum_{i=0}^m \left[ \sum_{z=1}^n a_z e_z(ih) + \sum_{z=0}^n b_z f_z(ih) + g(ih) \right]^2. \quad (4.102)$$

Умови мінімізації  $E$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a_s} = 0, & 1 \leq s \leq n, \\ \frac{\partial E}{\partial b_s} = 0, & 0 \leq s \leq n. \end{cases} \quad (4.103)$$

Підставляючи значення  $E$  з (4.102) в (4.103) та ділячи на 2 одержимо

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^m \left\{ \left[ \sum_{z=1}^n a_z e_z(ih) + \sum_{z=0}^n b_z f_z(ih) + G(ih) \right] e_s(ih) \right\} = 0, & 1 \leq s \leq n, \\ \sum_{i=0}^m \left\{ \left[ \sum_{z=1}^n a_z e_z(ih) + \sum_{z=0}^n b_z f_z(ih) - G(ih) \right] f_s(ih) \right\} = 0, & 0 \leq s \leq n. \end{cases} \quad (4.104)$$

Якщо розташувати шукані коефіцієнти у такій послідовності  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ , то елементи розширеної матриці  $C$  системи (4.104) лінійних алгебраїчних рівнянь можна обчислювати за такими формулами

$$C_{z,s} = \begin{cases} \sum_{i=0}^m e_z(ih)e_s(ih), & 1 \leq s \leq n, \\ \sum_{i=0}^m e_z(ih)f_{s-n-1}(ih), & n+1 \leq s \leq 2n+1, \\ \sum_{i=0}^m e_z(ih)G(ih), & s = 2n+2. \end{cases} \quad (4.105)$$

$$C_{z,s} = \begin{cases} \sum_{i=0}^m f_{z-n-1}(ih)e_s(ih), & 1 \leq s \leq n, \\ \sum_{i=0}^m f_{z-n-1}(ih)f_{s-n-1}(ih), & n+1 \leq s \leq 2n+1, \\ \sum_{i=0}^m f_{z-n-1}(ih)g(ih), & s = 2n+2. \end{cases} \quad (4.106)$$

Після того як масив  $C: \text{Matr}$  сформований (type  $\text{Matr} = \text{array}[1..2*N_{\text{max}}+1, 1..2*N_{\text{max}}+2]$  of real), викликаємо процедуру  $\text{SystUr}$  (див. дод.4) таким чином  $\text{SystUr}(2*n+1, C, A)$ . Масив  $A$  повертається у вигляді:

	$-1$	$0$	$1$	$2$	$\dots$	$n$	$n+1$	$n+2$	$\dots$	$2n+1$
$A$	$2n+1$	$\sim$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_n$	$b_0$	$b_1$	$\dots$	$b_n$

Цей масив розбивається на два

	$-1$	$0$	$1$	$2$	$\dots$	$n$
$A$	$n$	$1$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_n$

	$-1$	$0$	$1$	$2$	$\dots$	$n$
$B$	$n$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_n$

При потребі масиви  $A$  та  $B$  (особливо  $B$ ) можна відредагувати, тобто скоригувати (в сторону зменшення) вміст комірки з номером  $-1$ , коли старші

коефіцієнти за модулем виявляться меншими деякої наперед заданої малої величини  $\varepsilon$ .

Оформимо описаний алгоритм у вигляді процедури WpXY. При цьому будемо вважати, що крок за часом  $h$  достатньо малий, щоб операцію інтегрування в формулах для  $e(t)$ ,  $f(t)$ ,  $g(t)$  рівняння (4.100) можна було б реалізувати за формулою трапецій, а диференціювання в тих же формулах - через ліві, праві та центральні різниці.

```

procedure WpXY(X,Y: CoefR; n,k:integer; var B,A:Coef);
  var m,s,z,i      :integer;
      h,Sum:real;  M1,M2:CoefR; C:Matr;
  procedure Integr (var Jf:CoefR);
    var s:integer;
        Mf:CoefR;
  begin
    Mf:=If;  If[0]:=0;
    for s:=1 to m do
      If[s]:=If[s-1]+(Mf[s-1]+Mf[s])/2*h
    end;
  procedure Dif (var Df:CoefR);
    var s:integer;
        Mf:CoefR;
  begin
    Mf:=Df;  Df[0]:=(Mf[1]-Mf[0])/h;
    Df[m]:=(Mf[m]-Mf[m-1])/h;
    for s:=1 to m-1 do
      Df[s]:=(Mf[s+1]-Mf[s-1])/(2*h)
    end;
  procedure EzFz (z:integer; Mf:CoefR; var Mz:CoefR);
    var i,j,f,s :integer;
        Iy:CoefR;
        t,Ts,R:real;
  begin
    for i:=0 to m do
      begin
        t:=i*h;
        if z<=k-1
        then
          if i=0
          then R:=0
          else
            begin

```

```

        Iy:=Mf;
        for j:=1 to k-z do
            Integr(Iy);
        R:=Iy[i];
        for s:=0 to z-1 do
            begin
                Iy:=Mf;
                for j:=1 to s do
                    Dif(Iy);
                Ts:=1;
                for j:=1 to k-z+s do
                    Ts:=Ts*t/j;
                R:=R-Iy[0]*Ts;
            end
        end
    end
else
    begin
        Iy:=Mf;
        for j:=1 to z-k do Dif(Iy);
        R:=Iy[i];
        for s:=0 to k-1 do
            begin
                Iy:=Mf;
                for j:=1 to z-k-s do Dif (Iy);
                Ts:=1;
                for j:=1 to s do Ts:=Ts*t/j;
                R:=R-Jy[0]*Ts
            end
        end;
        Mz[i]:=R
    end
end;
end;

```

#### 4.9. Ідентифікація динамічного об'єкта за рядом точок його амплітудно-фазової характеристики методом найменших квадратів

Метод найменших квадратів з його здатністю згладжування можливих похибок у вихідних даних, що використовується для ідентифікації динамічного об'єкта, а також з його “терпимістю” до неповної відповідності апроксимуючої структури глибинним властивостям досліджуваного об'єкта може бути застосованим для ідентифікації за рядом точок амплітудно-фазової характеристики відповідного каналу.

Отже, нехай маємо ряд точок амплітудно-фазової характеристики  $R_S + jI_S$ ,  $0 \leq s \leq m$ . Тут  $R_S = R(\omega_S)$ ,  $I_S = I(\omega_S)$ , інформація зосереджена в трьох масивах, відповідно  $W, R, I$ . Апроксимуючу передаточну функцію шукатимемо у вигляді

$$W(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}. \quad (4.107)$$

Замінюючи в (4.107)  $p$  на  $j\omega_S$  та позначаючи  $W(j\omega_S) = R_S + jI_S$  одержуємо

$$R_S + jI_S = \frac{b_0 - b_2 \omega_S^2 + b_4 \omega_S^4 - \dots + j\omega (b_1 - b_3 \omega_S^2 + b_5 \omega_S^4 - \dots)}{1 - a_2 \omega_S^2 + a_4 \omega_S^4 - \dots + j\omega (a_1 - a_3 \omega_S^2 + a_5 \omega_S^4 - \dots)}. \quad (4.108)$$

За критерій якості апроксимації приймаємо

$$E = \sum_{S=0}^m \left\{ \left[ (1 - a_2 \omega_S^2 + a_4 \omega_S^4 - \dots) R_S - \omega_S (a_1 - a_3 \omega_S^2 + a_5 \omega_S^4 - \dots) I_S - \right. \right. \\ \left. \left. - b_0 + b_2 \omega_S^2 - b_4 \omega_S^4 + \dots \right]^2 + \left[ (1 - a_2 \omega_S^2 + a_4 \omega_S^4 - \dots) I_S + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega_S (a_1 - a_3 \omega_S^2 + a_5 \omega_S^4 - \dots) R_S - \omega_S (b_1 - b_3 \omega_S^2 + b_5 \omega_S^4 - \dots) \right]^2 \right\} \quad (4.109)$$

Умови мінімізації  $E$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, & 1 \leq i \leq n, \\ \frac{\partial E}{\partial b_i} = 0, & 0 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (4.110)$$

Підставляючи у (4.110) вираз (4.109), одержуємо систему з  $(2n+1)$  лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів передаточної функції (4.107).

Розглянемо алгоритм формування розширеної матриці цієї системи для ряду послідовних значень  $n$ .

Нехай  $n = 1$ . 
$$W(p) = \frac{b_0 + b_1 p}{1 + a_1 p}. \quad (4.111)$$

$$E = \sum_{s=0}^m \left\{ [R_S - \omega_S a_1 I_S - b_0]^2 + [I_S + \omega_S a_1 R_S - \omega_S b_1]^2 \right\}. \quad (4.112)$$

Умови оптимізації  $E$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a_1} = 2 \sum_{s=0}^m \{ [R_s - \omega_s a_1 I_s - b_0](-\omega_s I_s) + [I_s + \omega_s a_1 R_s - \omega_s b_1] \omega_s R_s \} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b_0} = 2 \sum_{s=0}^m \{ [R_s - \omega_s a_1 I_s - b_0](-1) \} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b_1} = 2 \sum_{s=0}^m \{ [I_s + \omega_s a_1 R_s - \omega_s b_1](-\omega_s) \} = 0. \end{cases} \quad (4.113)$$

Представимо розширену матрицю для системи (4.113)

	1	2	3	4
1	$\sum_{s=0}^m (R_s^2 + I_s^2) \omega_s^2$	$\sum_{s=0}^m I_s \omega_s$	$-\sum_{s=0}^m R_s \omega_s^2$	0
2	$\sum_{s=0}^m I_s \omega_s$	$m+1$	0	$\sum_{s=0}^m R_s$
3	$-\sum_{s=0}^m R_s \omega_s^2$	0	$\sum_{s=0}^m \omega_s$	$\sum_{s=0}^m I_s \omega_s$
	$a_1$	$b_0$	$b_1$	

Під стовпчиками розширеної матриці наведено значення невідомих, коефіцієнтами при яких є елементи відповідних стовпчиків.

Нехай тепер  $n = 2$ .

$$W(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}{1 + a_1 p + a_2 p^2}. \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned} E = \sum_{s=0}^m \left\{ \left[ (1 - a_2 \omega_s^2) R_s - \omega_s a_1 I_s - b_0 + b_2 \omega_s^2 \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ (1 - a_2 \omega_s^2) I_s + \omega_s a_1 R_s - \omega_s b_1 \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Умови мінімізації  $E$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_1} &= 2 \sum_{S=0}^m \left\{ \left[ (1 - a_2 \omega_S^2) R_S - \omega_S a_1 I_S - b_0 + b_2 \omega_S^2 \right] (-\omega_S I_S) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ I_S (1 - a_2 \omega_S^2) + \omega_S a_1 R_S - \omega_S b_1 \right] \omega_S R_S \right\} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial a_2} &= 2 \sum_{S=0}^m \left\{ \left[ (1 - a_2 \omega_S^2) R_S - \omega_S a_1 I_S - b_0 + b_2 \omega_S^2 \right] (-\omega_S^2 R_S) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ I_S (1 - a_2 \omega_S^2) + \omega_S a_1 R_S - \omega_S b_1 \right] \omega_S^2 I_S \right\} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b_0} &= 2 \sum_{S=0}^m \left\{ \left[ (1 - a_2 \omega_S^2) I_S - \omega_S a_1 R_S - \omega_S b_1 \right] (-1) \right\} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b_1} &= 2 \sum_{S=0}^m \left\{ \left[ (1 - a_2 \omega_S^2) R_S - \omega_S a_1 I_S - b_0 + b_2 \omega_S^2 \right] (-\omega_S) \right\} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b_2} &= 2 \sum_{S=0}^m \left\{ \left[ (1 - a_2 \omega_S^2) R_S - \omega_S a_1 I_S - b_0 + b_2 \omega_S^2 \right] \omega_S^2 \right\} = 0. \end{aligned} \right. \quad (4.116)$$

Запишемо розширену матрицю даної системи:

	1	2	3	4	5	6
1	$\sum_{S=0}^m (R_S^2 + I_S^2) \omega_S^2$	0	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S$	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^2$	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^3$	0
2	0	$\sum_{S=0}^m (R_S^2 + I_S^2) \omega_S^4$	$\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^2$	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^3$	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^4$	$\sum_{S=0}^m (R_S^2 + I_S^2) \omega_S^4$
3	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S$	$\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^2$	m+1	0	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^2$	$-\sum_{S=0}^m R_S$
4	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^2$	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^3$	0	$\sum_{S=0}^m \omega_S^2$	0	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S$
5	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^3$	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^4$	$-\sum_{S=0}^m \omega_S^2$	0	$\sum_{S=0}^m \omega_S^4$	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^2$
	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	

Для  $n = 3$  маємо

$$W(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3}. \quad (4.117)$$

$$E = \sum_{S=0}^m \left\{ \left[ (1 - a_2 \omega_S^2) R_S - \omega_S (a_1 - a_3 \omega_S^2) I_S - b_0 + b_2 \omega_S^2 \right]^2 + \left[ (1 - a_2 \omega_S^2) I_S + \omega_S (a_1 - a_3 \omega_S^2) R_S - \omega_S (b_1 - b_3 \omega_S^2) \right]^2 \right\}. \quad (4.118)$$

За браком місця опускаємо формули для похідних від  $E$ , наводимо відразу схему заповнення розширеної матриці, причому розіб'ємо її на дві частини: перша – 4 стовпчики, друга – решта.

	1	2	3	4
1	$\sum_{S=0}^m (R_S^2 + I_S^2) \omega_S^2$	0	$-\sum_{S=0}^m (R_S^2 + I_S^2) \omega_S^4$	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S$
2	0	$\sum_{S=0}^m (R_S^2 + I_S^2) \omega_S^4$	0	$\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^2$
3	$-\sum_{S=0}^m (R_S^2 + I_S^2) \omega_S^4$	0	$\sum_{S=0}^m (R_S^2 + I_S^2) \omega_S^6$	$-\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^3$
4	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S$	$\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^2$	$-\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^3$	$m+1$
5	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^2$	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^3$	$\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^4$	0
6	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^3$	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^4$	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^5$	$-\sum_{S=0}^m \omega_S^2$
7	$\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^4$	$-\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^5$	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^6$	0
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_0$

	5	6	7	8
1	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^2$	$-\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^3$	$\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^4$	0
2	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^3$	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^4$	$-\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^5$	$-\sum_{S=0}^m (R_S^2 + I_S^2) \omega_S^2$
3	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^4$	$\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^5$	$\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^6$	0

4	0	$-\sum_{S=0}^m \omega_S^2$	0	$-\sum_{S=0}^m R_S$
5	$-\sum_{S=0}^m \omega_S^2$	0	$-\sum_{S=0}^m \omega_S^4$	$-\sum_{S=0}^m I_S \omega_S$
6	0	$\sum_{S=0}^m \omega_S^4$	0	$-\sum_{S=0}^m R_S \omega_S^2$
7	$\sum_{S=0}^m \omega_S^4$	0	$\sum_{S=0}^m \omega_S^6$	$-\sum_{S=0}^m I_S \omega_S^3$
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	

Процес нарощування  $n$  можна продовжувати. На практиці, очевидно, доцільно обмежитись максимальними значеннями  $n$  порядку 4 чи 5. Користувач легко може сам створити відповідне програмне забезпечення.

Розв'язання системи рівнянь, якій відповідає розширена матриця, сформована описаним способом, реалізується викликом підпрограми SystUr в такій формі

SystUr(2\*n+1, U, A),

де U – розширена матриця типу Matr

(type Matr = array [1..2\*Nmax+1, 1..2\*Nmax+2] of real), A – масив типу Coef (type Coef=array[-1..30] of real).

Розв'язок у вигляді масиву A розноситься на два масиви: A та B (обидва типу Coef) таким чином

A[-1]=n; A[0]=1; B[-1]=n;

For s:=0 to n do B[s]:=A[n+1+s].

На цьому визначення коефіцієнтів поліномів B(p) та A(p) чисельника та знаменника відповідної передаточної функції завершується.

Описаний алгоритм реалізується підпрограмою WpCMNK

```

procedure WpCMNK(W, R, J:coef; n:integer;
                var B, A:coef);
var z, s, m:integer; v:real;
    WP:array [2..2*n] of coef;
    E, RJ, R2, J2, R2J2:coef;

```

```

        U:Matr;
function C(E,F:coef):real;
  var s:integer; D:real;
  begin
    D:=0;
    for s:=0 to m do      D:=D+E[s]*F[s];
    C:=D
  end;
function Zn(s:integer):integer;
  begin
    if odd(s) then Zn:=1      else Zn:=-1
  end;
begin
  m:=round(W[-1]);
  for s:=0 to m do
    begin
      E[s]:=1; R2[s]:=sqr(R[s]); WP[2,s]:=sqr(W[s]);
      J2[s]:=sqr(J[s]); RJ[s]:=R[s]+J[s];
      R2J2:=R2[s]+J2[s]
    end;
  for z:=3 to 2*n do
    for s:=0 to m do WP[z,s]:=WP[z-1,s]*W[s];
  V:=C(R2J2,WP[2]); U[1,1]:=V;
  case N of
    1: begin
      U[2,2]:=m+1; V:=C(J,W); U[1,2]:=V;
      U[2,1]:=V; V:=C(R,WP[2]); U[1,3]:=-V;
      U[3,1]:=-V; U[2,4]:=C(R,E); U[3,4]:=C(J,W)
      for s:=1 to 3 do U[s,5-s]:=0;
      U[3,3]:=C(W,W)
    end;
    2: begin
      U[2,6]:=V; U[1,2]:=0; U[2,1]:=0;
      V:=C(J,W); U[1,3]:=V; U[3,1]:=V;
      U[2,2]:=C(R2J2, WP[4]); V:=C(R,WP[2]);
      U[1,4]:=-V; U[2,3]:=V; U[3,2]:=V;
      U[4,1]:=-V; V:=C(J,WP[3]);
      for s:=1 to 5 do U[s,6-s]:=-V*Zn(s);
      U[3,3]:=m+1; V:=C(R,WP[4]); U[1,6]:=0;
      U[2,5]:=-V; U[3,4]:=0; U[4,3]:=0;
      U[5,1]:=-V; V:=C(WP[2],E);
      for s:=3 to 5 do U[s,8-s]:=-V*Zn[s];
      V:=C(R,E); U[3,6]:=V; U[4,5]:=0;
      U[5,4]:=0; U[5,5]:=C(WP[4],E)
    end;
    3:begin
      U[2,8]:=V; U[1,2]:=0; V:=(R2J2, WP[4]);

```

```

for s:=1 to 3 do U[s,4-s]:=-V*Zn[s];
V:=C(J,W); U[1,4]:=V; U[2,3]:=0;
U[3,2]:=0; U[4,1]:=V; U[5,8]:=V;
V:=C(R,WP[2]);
for s:=1 to 5 do U[s,6-s]:=-V*Zn(s);
U[6,8]:=-V; U[3,3]:=C(R2J2,WP[6]);
V:=C(J,WP[3]); U[7,8]:=-V;
for s:=1 to 3 do
begin
U[s,7-s]:=-V*Zn(s);
U[7-s,s]:=-V*Zn(s)
end;
V:=C(R,WP[4]);
for s:=1 to 7 do U[s,8-s]:=V*Zn(s);
U[4,4]:=m+1; V:=C(J,WP[5]);U[1,8]:=0;
U[2,7]:=-V; U[3,6]:=V; U[4,5]:=0;
U[5,4]:=0; U[6,3]:=V; U[7,2]:=-V;
V:=C(R,WP[6]); U[3,7]:=V; U[7,3]:=-V;
V:=C(WP[2],E);
for s:=4 to 6 do U[s,10-s]:=V*Zn(s);
for s:=3 to 7 do U[s,11-s]:=0;
U[4,8]:=-C(R,E); V:=C(WP[4],E);
for s:=5 to 7 do U[s,12-s]:=-V*Zn[s];
U[7,6]:=0; U[6,7]:=0; U[7,8]:=-C(WP[6],E)
end;
4:begin
U[1,2]:=0; U[2,1]:=0; V:=C(R2J2,WP[4]);
for s:=1 to 3 do U[s,4-s]:=-V*Zn(s);
for s:=1 to 4 do U[s,5-s]:=0;
V:=C(J,W); U[1,5]:=V; U[5,1]:=V;
U[6,10]:=V; V:=C(R2J2,WP[6]);
for s:=2 to 4 do U[s,6-s]:=V*Zn(s);
V:=C(R,W); U[1,6]:=-V; U[2,5]:=V;
U[3,4]:=0; U[4,3]:=0; U[5,2]:=V;
U[6,1]:=-V; U[7,10]:=V; V:=C(J,WP[3]);
for s:=1 to 7 do U[s,8-s]:=-V*Zn[s];
U[4,4]:=C(R2J2,WP[8]); V:=C(R,WP[4]);
for s:=1 to 3 do
begin
U[s,9-s]:=V*Zn(s);
U[9-s,s]:=V*Zn(s)
end;
U[4,5]:=V; U[5,4]:=-V; U[9,10]:=-V;
V:=C(J,WP[5]); U[6,5]:=0;
for s:=1 to 9 do U[s,10-s]:=V*Zn(s);
U[5,5]:=m+1; U[1,10]:=0; U[5,6]:=0;
V:=C(R,WP[6]); U[2,10]:=C(RJ,WP[2]);

```

```

for s:=2 to 4 do
  begin
    U[s,11-s]:=-V*Zn(s);
    U[11-s,s]:=-V*Zn(s)
  end;
V:=C(J,WP[7]); U[3,9]:=-V; U[4,8]:=V;
U[8,4]:=V; U[9,3]:=-V; V:=C(WP[2],E);
for s:=5 to 7 do U[s,12-s]:=-V*Zn(s);
for s:=3 to 8 do U[s,13-s]:=0;
V:=C(R,WP[8]); U[4,9]:=-V; U[9,4]:=-V;
U[4,10]:=C(RJ,WP[4]); V:=C(WP[4],E);
for s:=5 to 9 do U[s,14-s]:=V*Zn(s);
for s:=6 to 9 do U[s,15-s]:=0;
U[5,10]:=C(R,E); V:=C(WP[6],E);
for s:=7 to 9 do U[s,16-s]:=-V*Zn(s);
U[8,9]:=0; U[9,8]:=0; U[8,10]:=C(J,WP[3]);
U[9,9]:=C(WP[8],E)
end
end;
SystUr (2*n+1,U,A); A[-1]:=n; A[0]:=1; B[-1]:=n;
for s:=0 to n do B[s]:=A[n+1+s]
end;

```

## **ДОДАТКИ**

## Додаток 1

## Програма DeadTime

```

Program DeadTime;
uses Graph, Crt, Hi5, Servis, SunVar, GromU;
const
  Tau:real=1; {запізнювання}
  D:real=5; {час спостереження}
  Ks:integer=1; {кількість кроків за t на 1пкс}
  V0:real=0.1; {крок інтегрування за часом}
  Dt:real=0.1; {приріст часу на 1 пкс}
  n:integer=1; {порядок апроксимуючого виразу}
var Ao,Bo,Àà,Ba,As,Bs,K,Y:Coef;
    Mo:CoefL;
    J,Jl:char;
    T0:string[10],
    Tss:string[80];
{$i UmnPol.pas}
{$i SystZam.pas}
{$i RunKutWp.pas}

procedure ChainAp;
var S:integer;
    A:Coef;
    t:real;
begin
  t:=Tau/n;
  Ba[-1]:=0;Ba[0]:=1;
  A[-1]:=1; A[0]:=1; A[1]:=t; Aa:=Ba;
  for S:=1 to n do UmnPol(Aa,A,Aa);
end;

procedure MacLoren;
var S:integer;
    Ci:real;
begin
  Ba[-1]:=0; Ba[0]:=1; Aa[-1]:=n; C:=1; Aa[0]:=C;
  for S:=1 to n do begin
    C:=C*Tau/S;Aa[S]:=C;
  end
end;

procedure ChainId;
var S:integer;
    B,A:Coef;

```

```

    t:real;
begin
    t:=Tau/(2*n);
    B[-1]:=1; B[0]:=1; B[1]:=-t;
    A[-1]:=1; A[0]:=1; A[1]:=t;
    Ba[-1]:=0; Ba[0]:=1; Aa:=Ba;
    for S:=1 to n do begin
        UmnPol(Ba,B,Ba);
        UmnFol(Aa,A,Aa)
    end
end;

procedure DrPd;
var S,Zn:integer;
    Nom,Denom:real;
begin
    Aa[-1]:=n; Ba[-1]:=n; Aa[0]:=1; Ba[0]:=1;
    Nom:=n; Denom:=2*n; Zn:=-1;
    for S:=1 to n do begin
        Aa[S]:=Aa(S-1)*Nom*Tau/Denom/S;
        Ba[S]:=Aa[S]*Zn; Zn:=-Zn; Nom:=Nom-1;
        Denom:=Denom-1
    end
end;

procedure Obj;
var S,m:integer,
    t:string[2];
begin
    Oui('Nb - степiнь полинома B', m);
    Bo[-1]:=m;
    for S:=m downto 0 do begin
        Str(S,t);
        Our('B['+t+']', Bo[S])
    end;
    Oui ('Na - степiнь полинома A',m); Ao[-1]:=m;
    for S:=m downto 0 do begin
        Str(S,t);
        Our('A['+t+']', Ao[S])
    end
end;

procedure SCoor;
begin
    Xmin:=0; Xmax:=D; Ymin:=-1; Ymax:=2;
    X0Y0(false); SystCoor
end;

```

```

procedure Init;
var ns,S:integer;
begin
  ns:=round(As[-1]); SCoor; SystZam(Bs.As,K);
  Y[-1]:=ns; Dt:=D/L; V0:=Dt/Ks;
  for s:=0 to ns do Y[s]:=0
end;

procedure Graphic;
var X,Y,S:integer;
begin
  MoveTo (Xu, Y0);
  for S:=1 to L do begin
    X:=Xu+S; Y:=Y0-round(Mo[s]/Dy);
    LineTo(X,Y); HiPlot5(X,Y,-1)
  end
end;

procedure ObSdv;
var nz,S,Z:integer;
begin
  Clear(0,0,GetMaxX-1,GetMaxY-11);
  Ou('Треба оновити параметри об'єкта (y/n)?');
  J1:=UpCase(ReadKey);
  if J1='Y' then Obj;
  As:=Ao; Bs:=Bo; Init; nz:=round (Tau/Dt);
  for S:=0 to nz do Mo[S]:=0;
  for S:=nz4-1 to L do begin
    for Z:=1 to Ks do RunKutWp(As,K,1,1,1,V0,Y);
    Mo[S]:=Y[0]
  end;
  Graphic
end;

procedure Syst;
var Z,S:integer;
begin
  UmnPol(Bo,Ba,Bs); UmnPol(Ao,Aa,As); Init; Mo[0]:=0;
  for S:=1 to L do begin
    for Z:=1 to Ks do RunKutWp(As, K, 1, 1, 1, V0, Y);
    Mo[S]:=Y[0];
  end;
  Graphic
end;

procedure Info;

```

```

begin
  clear(0, GetMaxY-10, GetMaxX-1, GetMaxY-1);
  OutTextXY(0, GetMaxY-10, Tss)
end;

procedure InfoPar;
begin
  Str(Tau: 10:3, T0); Tss:='Tau='+T0;
  Str(D:10:3, T0); Tss:=Tss+', D='+T0;
  Str(Ks, T0); Tss:=Tss+', Ks='+T0;
  Str(n, T0); Tss:=Tss+', N='+T0;
  Str(V0:10:3, T0); Tss:=Tss+', V0='+T0; Info
end;

procedure Serv;
begin
  repeat
    PutA;
    Ou('0-Вих, 1-НСК, 2-Рзш, 3-НКС, 4-Оцш, 5-Нпс, 6-Сзб, 7-Збб, 8-
Взб');
    J1:=ReadKey;
    case J1 of
      '1': SystCoor;
      '2': Mark;
      '3': Net;
      '4': Num;
      '5': Inscr;
      '6': Chif;
      '7': Gerf;
      '8': PutF
    end
  until J1='0'
end;

begin
  L:=500; H:=170; SetWriteMode(1);
  Bo[-1]:=0; Bo[0]:=1; Ao:=Bo; N:=1; As:=Ao; Bs:=Bo;
  repeat
    PutA;
    Ou('0-Tau, 1-D, 2-Ks, 3-N, 4-Ob, 5-Ар, 6-Мс, 7-Id, 8-Др, 9-
Serv, Esc-Вих');
    Init; InfoPar; J:=ReadKey;
    case J of
      '0': Our('Tau-час запізнювання', Tau);
      '1': Our('D-час спостереження', D);
      '2': Oui('Ks-кількість кроків за t на 1 пкс', Ks);
      '3': Oui('N-порядок апроксимуючого виразу*', N);
    end
  until J='0'
end;

```

```

    '4': Obsdv;
    '5': begin ChainAp; Syst end;
    '6': begin MacLoren; Syst end;
    '7': begin ChaihId; Syst end;
    '8': begin DrPd; Syst end;
    '9': Serv
end
until J=#27;
CloseGraph
end.

```

## Додаток 2

## Програмний модуль GromU

```

{$F+,O+}
Unit GromU;
Interface
  uses Crt, Graph, Hi5, Servis, Sunvar;
  var res:integer;
  procedure XOY0(God:boolean);
  { Визначення початку координат та масштабів вздовж осей}
  procedure SYSTCOOR; { НСК-нанесення системи координат }
  procedure Image; { ФЗМ-формування меж зображення }
  procedure Net; { Встановлення вікна зображення }
  procedure Num; { ВсШ-встановлення шкал }
  procedure Mark; { НРО-нанесення розмітки на осі }
  procedure Inscr; { Нпс-написи }
  procedure GetBit(X1,Y1,X2,Y2:integer;NameF:Nf);
  procedure PutBit(X3,Y3:integer; NameF:Nf; SPos:word);
  procedure GetF; {ЗЗбФ-запам'ятовування зображення у файл}
  procedure PutF; { ВЗбФ-відтворення зображення з файлу }
  procedure Chif; { СЗб-стирання зображення }

Implementation
  procedure XOY0(God:boolean);
  begin
    L0:=L; H0:=H;
    DX:=(Xmax-Xmin)/L;
    DY:=(Ymax-Ymin)/H;
    if God then
      if DY>DX*Hj then
        begin
          L0:=round((Xmax-Xmin)/DY*Hj);
          if L0<>0 then DX:=(Xmax-Xmin)/L0

```

```

else DX:=0
end
else
begin
H0:=round((Ymax-Ymin)/(DX*Hj));
if H0<>0 then DY:=(Ymax-Ymin)/H0
else DY:=0
end;
XU:=320-L0 div 2; YU:=100-H0 div 2;
if DX=0 then X0:=XU
else X0:=XU-round(Xmin/DX);
if DY=0 then Y0:=YU
else Y0:=YU+round(Ymax/DY);
XnS:=Xmin; XkS:=Xmax; YnS:=Ymin; YkS:=Ymax;
DxS:=XkS-XnS; DyS:=YkS-YnS
end;
procedure SYSTCOOR;
begin
HiFlesh5(XU-10,Y0,XU+L0+10,Y0,-1);
HiFlesh5(X0,YU+H0+5,X0,YU-5,-1)
end;
procedure Image;
begin
{Contur(XU,YU,X2,Y2); L:=X2-XU; H:=Y2-YU; L0:=L; H0:=H}
end;
procedure Net;
var Z,Z1Y,Z2Y,Z1X,Z2X:integer;
DI,DR:real;
S1,S2,S3:string[10];
begin
STR(XnS:10,S1); STR(XkS:10,S2); STR(DxS:10,S3);
SetWriteMode(1); SetLineStyle(1,0,1);
repeat
OutTextXY(140,0,'Xn,Xk,DX сітки (маємо
'+S1+', '+S2+', '+S3+')?');
GotoXY(1,1); read(XnS,XkS,DxS); PutA
until DxS>0;
STR(YnS:10,S1); STR(YkS:10,S2); STR(DyS:10,S3);
repeat
OutTextXY(140,0,'Yn,Yk,DY сітки (маємо
'+S1+', '+S2+', '+S3+')?');
GotoXY(1,1); read(YnS,YkS,DyS); PutA
until DyS>0;
DR:=DxS/DX; Z:=1; DI:=DyS/DY;
Z1X:=round(XnS/DxS); Z2X:=round(XkS/DxS);
Z1Y:=round(YnS/DyS); Z2Y:=round(YkS/DyS);
for Z:=Z1X to Z2X do if Z<>0 then

```

```

Line (X0+round(Z*DR), Y0-round(Z2Y*DI), X0+round(Z*DR),
                                           Y0-round(Z1Y*DI));
for Z:=Z1Y to Z2Y do if Z<>0 then
  Line (X0+round(Z1X*DR), Y0-round(Z*DI), X0+round(Z2X*DR),
                                               Y0-round(Z*DI));
PutA; SetLineStyle(0,0,1); SetWriteMode(0)
end;
procedure Num;
var J, JVH:char;
    X1,X2,Y1,Y2,XD,YD,X,Y:real;
    V,K,S,Z,S1,Z1,DS,DD,L,L1,LU,LY,SM:integer;
    T1,T2,T3:string[10];
    pTx:pointer;
    SizeTx:word;
    U:boolean;
begin
  Ou(' Будемо оцифрувати гориз. чи верт. шкалу (h,v)?');
  repeat
    JVH:=UpCase(ReadKey)
  until JVH in ['V','H'];
  PutA;
  if JVH='H'
  then
    begin
      Our(' Зачення Y для шкали ',Y); PutA;
      STR(XnS:10,T1); STR(XkS:10,T2); STR(DxS:10,T3);
      OutTextXY(200,0,'X-,Y€,DX (маємо
'+T1+', '+T2+', '+T3+') ');
      repeat
        GotoXY(1,1); read(X1,X2,XD)
      until XD>0
    end
  else
    begin
      Our(' Зачення X для шкали ',X); PutA;
      STR(YnS:10,T1); STR(YkS:10,T2); STR(DyS:10,T3);
      OutTextXY(200,0,'Y-,Y€,DY (маємо
'+T1+', '+T2+', '+T3+') ');
      repeat
        GotoXY(1,1); read(Y1,Y2,YD)
      until YD>0
    end;
  PutA; Ou('DS-довжина елемента в символах',DS);
  PutA; Ou('DD-кількість символів після десяткової
точки',DD);
  repeat
    PutA;

```

```

Oui('SM- зміщення відносно осі у пікселях',SM);
if JVH='H'
  then
    U:=(Y0-round(Y/DY)-SM+5<=GetMaxY-9) and
      (Y0-round(Y/DY)+SM-5>=9) and
      (X0+round(X1/DX)-DS*4>=0) and
(X0+round(X2/DX)+DS*4<=GetMaxX-40)
  else
    U:=(X0+round(X/DX)+SM-DS*4-4>=0) and
      (X0+round(X/DX)+SM+DS*4+4<=GetMaxX-40) and
      (Y0-round(Y1/DY)+5<=GetMaxY-9) and (Y0-round(Y2/DY)-
5>=9)
  until U;
PutA;
if JVH='H'
  then
    begin
      L:=round((X2-X1)/DX)+DS*8+10;
      SizeTx:=ImageSize(0,0,L,11); GetMem(pTx,SizeTx);
      L1:=X0+round(X1/DX)-(DS*4+4); LY:=Y0-round(Y/DY)-SM;
      GetImage(L1,LY-6,L1+L,LY+5,pTx^); X:=X1;
      repeat
        STR(X:DS:DD,T1); S:=X0+round(X/DX); Z:=LY;
        for Z1:=Z-6 to Z+5 do
          for S1:=S-DS*4-5 to S+DS*4+5 do HiPlot5(S1,Z1,0);
        OutTextXY(S-DS*4,Z-4,T1); X:=X+XD
      until X>X2;
      PutA; Ou('0-видаляє, 1-фіксує');
      repeat
        J:=ReadKey
      until J in ['0','1'];
      if J='0' then PutImage(L1,LY-6,pTx^,0)
    end
  else
    begin
      L:=DS*8+8; LU:=round((Y2-Y1)/DY)+12;
      SizeTx:=ImageSize(0,0,L,LU); GetMem(pTx,SizeTx);
      L1:=X0+round(X/DX)+SM-(DS*4+4); LY:=Y0-round(Y2/DY)-6;
      GetImage(L1,LY,L1+L,LY+LU,pTx^); Y:=Y1;
      repeat
        STR(Y:DS:DD,T2); S:=X0+round(X/DX)+SM; Z:=Y0-
round(Y/DY);
        for Z1:=Z-6 to Z+6 do
          for S1:=S-DS*4-4 to S+DS*4+4 do HiPlot5(S1,Z1,0);
        OutTextXY(S-DS*4,Z-4,T2); Y:=Y+YD
      until Y>Y2;
      PutA; Ou('0-видаляє, 1-фіксує');
    end
  end

```

```

    repeat
        J:=ReadKey
    until J in ['0','1'];
    if J='0' then PutImage(L1,LY,pTx^,0)
end;
PutA
end;
procedure Mark;
var Z,Z1,Z2:integer;
    DI,DR:real;
    S1:string[10];
begin
    STR(DxS:10,S1);
    Our('крок штрихів на гориз. осі( маємо '+S1+' )',DxS);
PutA;
    STR(DyS:10,S1);
    Our('крок штрихів на вертика. осі( маємо '+S1+' )',DyS);
PutA;
    DR:=DxS/DX; DI:=DyS/DY; Z1:=round(XnS/DxS);
Z2:=round(XkS/DxS);
    for Z:=Z1 to Z2 do
        if Z<>0 then HiDraw5(X0+round(Z*DR),Y0-
2,X0+round(Z*DR),Y0+2,-1);
        Z1:=round(YnS/DyS); Z2:=round(YkS/DyS);
        for Z:=Z1 to Z2 do
            if Z<>0 then HiDraw5(X0-4,Y0-round(Z*DI),X0+4,Y0-
round(Z*DI),-1);
            PutA
        end;
end;
procedure Inscr;
var ST:STT;
    DT,SP,ZP,DZ,DS:integer;
    pTx,pT:pointer;
    SizeT:word;
    C:char;
procedure Tex;
begin
    GetImage(S-6,Z-5,S+8*DT-3,Z+4,pT^); PutImage(S-6,Z-
5,pTx^,0)
end;
procedure TextGr;
var J:char;
begin
    repeat
        GotoXY(7,1); readln(ST); DT:=length(ST)
    until DT<>0;

```

```

    SizeT:=ImageSize(0,0,DT*8+3,9); GetMem(pT,SizeT);
GetMem(pTx,SizeT);
    PutA; OutTextXY(2,1,ST); GetImage(0,0,DT*8+3,9,pTx^);
end;
begin
    S:=6; Z:=15; PutA; Ou('Текст:'); TextGr; PutA; Tex;
    DZ:=0; DS:=0;
    repeat
        SP:=S; ZP:=Z; C:='5';
        Ou(' 2,4,6,8-переміщ. Текст, 0-зупиняє, -видаляє,
+фіксує');
        if KeyPressed then C:=ReadKey;
        if C in ['0','2','4','5','6','8','+','-']
            then
                begin
                    PutImage(S-6,Z-5,pT^,0); Delay(200);
                    case C of
                        '0': begin DZ:=0; DS:=0 end;
                        '2': DZ:=DZ+1;
                        '4': DS:=DS-1;
                        '5': ;
                        '6': DS:=DS+1;
                        '8': DZ:=DZ-1
                    end;
                    if C='-';
                    then PutImage(S-6,Z-5,pT^,0)
                    else
                        begin
                            Z:=Z+DZ; S:=S+DS;
                            if Z>=180 then Z:=180;
                            if Z<=10 then Z:=10;
                            if S>590-DT*8 then S:=590-DT*8;
                            if S<=0 then S:=0;
                            Tex;
                            if C='0' then begin S:=SP; Z:=ZP end
                        end
                    end
                until C in ['-','+'];
                PutA
            end;
end;
procedure PixPut;
var Fon:word;
    U:boolean;
begin
    if (S>=0) and (S<=GetMaxX) and (Z>=0) and (Z<=GetMaxY)
then
    begin

```

```

Fon:=GetPixel(S,Z);
case SPos of
  0: U:=BC=1;
  1: U:=BC<>Fon;
  2: U:=(BC=1) or (Fon=1);
  3: U:=(BC=1) and (Fon=1);
  4: U:=BC=0
end;
if U then PutPixel(S,Z,1)
      else PutPixel(S,Z,0)
end
end;
end;
procedure GetBit(X1,Y1,X2,Y2:integer;NameF:Nf);
var L,H,S,Z,S8:integer;
    A:byte;
begin
  L:=X2-X1; H:=Y2-Y1; Assign(Fil,NameF); Rewrite(Fil);
  A:=L mod 256; write(Fil,A); A:=L div 256; write(Fil,A);
  A:=H mod 256; write(Fil,A); A:=H div 256; write(Fil,A);
  Z:=Y1; PutA; Ou('Іде сканування рядка');
  repeat
    S:=X1; SetViewPort(200,0,224,8,true); ClearViewPort;
    SetViewPort(0,0,GetMaxX,GetMaxY,true);
    STR(Z:3,ST); OutTextXY(200,0,ST);
    repeat
      S8:=1; A:=GetPixel(S,Z);
      while (S8<8) and (S<X2) do
        begin Inc(S); Inc(S8); A:=A+A+GetPixel(S,Z) end;
      if S8<8 then
        repeat
          A:=A+A; Inc(S8)
        until S8=8;
      write(Fil,A); Inc(S)
    until (S>X2) or (S>GetMaxX);
    Inc(Z)
  until (Z>Y2) or (Z>GetMaxY);
  A:=8; write(Fil,A); Close(Fil)
end;
end;
procedure PutBit(X3,Y3:integer; NameF:Nf; SPos:word);
var M,L,H:integer;
    S8:word;
    L1,L2,A:byte;
begin
  Assign(Fil,NameF); Reset(Fil);
  read(Fil,L2,L1); L:=L1*256+L2; read(Fil,L2,L1);
H:=L1*256+L2;
  Z:=Y3;

```

```

repeat
  S:=X3;
  repeat
    S8:=1; read(Fil,A); M:=128;
    repeat
      BC:=A div M; PixPut; A:=A mod M; Inc(S); Inc(S8);
M:=M div 2
    until (S8>8) or (S>X3+L)
  until S>X3+L;
  Inc(Z)
  until (Z>Y3+H) or (Z>GetMaxY);
  Close(Fil)
end;
procedure GetF;
var SL,ZV,SP,ZN:integer;
begin
  Readln(NameF);
  Contur(SL,ZV,SP,ZN);} GetBit(SL,ZV,SP,ZN,NameF
end;
procedure PutF;
var SL,ZV:integer;
begin
  ReadName(NameF);Corner(SL,ZV,'A');
  PutA; OutTextXY(120,0,'Введіть SP-спосіб взаємодії з
фоном');
  GotoXY(1,1); readln(SPos); PutBit(SL,ZV,NameF,SPos)
end;
procedure Chif;
var SL,SP,ZN,ZV:integer;
begin
  repeat
    PutA; Ou('1-стирає вікно, 2-стирає екран, 3-вихід');
    repeat J:=ReadKey until J in ['1'..'3'];
    case J of
      '1': begin
        {Contur(SL,ZV,SP,ZN);
SetViewport(SL,ZV,SP,ZN,true);}
        ClearViewport;
SetViewport(0,0,GetMaxX,GetMaxY,true)
        end;
      '2': begin ClearViewport; Menu(NM,Name) end;
      '3':
    end
  until J='3'; PutA;
end;
begin

```

```

DetectGraph(Gd,Gm); Path:='d:\tp ';
if Gd<>CGA then
  begin Gd:=CGA; Gm:=CGAHI end;
InitGraph(Gd,Gm,Path); res:=GraphResult;
if res<>0
  then begin writeln('Error=',res); readln; Halt(1) end;
end.

```

## Додаток 3

## Програмний модуль Hi5.

```

{$O+,F+}
Unit Hi5;
Interface
uses Graph;
const Hj:real=2.2;
  procedure HiArc5(X0,Y0,X1,Y1,A,C:integer);
    { малює дугу кола з центром в (X0,Y0), дуга починається
      в точці (X1,Y1) має величину A }
  procedure HiArc5M(X0,Y0,X1,Y1,A,C:integer; var
    XK,YK:integer);
    { на відміну від HiArc5 повертає XK,YK-кінця дуги }
  function HiArg5(X0,Y0,X1,Y1:integer):real;
    { малює дугу кола з центром в (X0,Y0), дуга починається
      в точці (X1,Y1) має величину A }
  procedure HiCirc5(X0,Y0,R,C:integer);
    { малює коло з центром в (X0,Y0), радіусом R, одиниця
      виміру-відстань між сусідніми пікселями по вертикалі}
  procedure HiEll5(X0,Y0,X1,Y1,A,C:integer;K:real; var
XK,YK:integer);
    { малює дугу еліпса з центром в (X0,Y0), починається в
      точці (X1,Y1), яка є кінцем осі, A-величина дуги
      (град.), K-відношення довжини другої осі еліпса до
      базової, XK,YK-координати кінця дуги }
  procedure HiFlesh5(X0,Y0,X1,Y1,C:integer);
    { малює стрілку, що починається в (X0,Y0),
      закінчується в (X1,Y1) }

```

## Implementation

```

Procedure HIARC5;
var S,X,Y,XP,YP,N:integer;
    AR,B,DA,G,R:real;
begin
  if (X0<>X1) or (Y0<>Y1) then
    begin

```

```

R:=sqrt(sqr((X0-X1)/Hj)+sqr((Y0-Y1)/1));
if abs(A)>=360
  then HiCirc5(X0,Y0,round(R),C)
  else
    begin
      AR:=Pi*A/180;
      B:=HiArg5(X0,Y0,X1,Y1);
      N:=round(abs(AR*R));
      DA:=AR/N;
      G:=B;
      X:=X1; Y:=Y1;
      for S:=1 to N do
        begin
          XP:=X; YP:=Y;
          G:=G+DA;
          X:=X0+round(R*cos(G)*Hj);
          Y:=Y0-round(R*sin(G));
          HiDraw5(XP,YP,X,Y,C);
          if C=-1 then HiPlot5(X,Y,-1)
        end
      end
    end
  end;
end;
procedure HiArc5M;
var S,X,Y,XP,YP,N:integer;
    AR,B,DA,G,R:real;
begin
  if (X0<>X1) or (Y0<>Y1) then
    begin
      R:=sqrt(sqr((X0-X1)/Hj)+sqr((Y0-Y1)/1));
      if abs(A)>=360
        then HiCirc5(X0,Y0,round(R),C)
        else
          begin
            AR:=Pi*A/180;
            B:=HiArg5(X0,Y0,X1,Y1);
            N:=round(abs(AR*R));
            if N=0 then N:=1;
            DA:=AR/N;
            G:=B;
            X:=X1; Y:=Y1;
            for S:=1 to N do
              begin
                XP:=X; YP:=Y;
                G:=G+DA;
                X:=X0+round(R*cos(G)*Hj);
                Y:=Y0-round(R*sin(G));
              end
            end
          end
        end
    end
  end;
end;

```

```

                HiDraw5 (XP, YP, X, Y, C);
                if C=-1 then HiPlot5 (X, Y, -1)
            end
        end
    end;
    XK:=X; YK:=Y
end;
Function HIARG5;
var A:real;
begin
    if X1=X0
        then
            if Y1<Y0
                then A:=Pi/2
                else A:=-Pi/2
            else
                if X1>X0
                    then A:=-arctan (Hj * (Y1-Y0) / (X1-X0))
                    else A:=Pi-arctan (Hj * (Y1-Y0) / (X1-X0));
                HiArg5:=A
            end;
end;
Procedure HICIRC5;
var X1, Y1, X2, Y3, DX, DY, DXP, RM, D:integer;
    R2:real;
procedure Plots;
begin
    X1:=X0+DX; Y1:=Y0-DY;
    X2:=X0-DX; Y3:=Y0+DY;
    HiPlot5 (X1, Y1, C); HiPlot5 (X2, Y1, C);
    HiPlot5 (X2, Y3, C); HiPlot5 (X1, Y3, C)
end;
begin
    R2:=sqr (R/1); RM:=round (R*Hj);
    HiPlot5 (X0+RM, Y0, C); HiPlot5 (X0-RM, Y0, C);
    DY:=1; DXP:=RM;
    repeat
        DX:=round (sqr (R2-sqr (DY)) *Hj);
        D:=abs (DX-DXP);
        if D<=1 then
            begin
                Plots;
                DXP:=DX; DY:=DY+1
            end
        until D>1;
    for DX:=DXP-1 downto 1 do
        begin
            DY:=round (sqr (R2-sqr (DX/Hj)));

```

```

        Plots
    end;
    HiPlot5(X0,Y0-R,C);
    HiPlot5(X0,Y0+R,C)
end;
Procedure HiEll5;
    var F,F1,X,Y,AR,R,A1,B1,W,DW:real;
        S,Z,SP,ZP,MDS,MDZ,MD:integer;
begin
    F:=HiArg5(X0,Y0,X1,Y1); AR:=A*Pi/180;
    A1:=sqrt(sqr((X1-X0)/Hj)+sqr((Y1-Y0)/1));
    B1:=A1*K; HiPlot5(X1,Y1,C);
    W:=0; DW:=AR/10; SP:=X1; ZP:=Y1;
    while abs(W)<abs(AR) do
        begin
            repeat
                W:=W+DW; X:=A1*cos(W); Y:=B1*sin(W);
                if abs(X)<1e-20
                    then
                        if Y>0 then F1:=Pi/2
                            else F1:=-Pi/2
                        else
                            if X>0 then F1:=arctan(Y/X)
                                else F1:=Pi+arctan(Y/X);
                R:=sqrt(sqr(X)+sqr(Y));
                S:=X0+round(R*cos(F+F1)*Hj);
                Z:=Y0-round(R*sin(F+F1));
                MDS:=abs(S-SP); MDZ:=abs(Z-ZP);
                if MDS>MDZ then MD:=MDS
                    else MD:=MDZ;
                if MD>1
                    then
                        begin
                            W:=W-DW; DW:=DW/1.2
                        end
                    else
                        if MD<1 then
                            begin
                                W:=W-DW; DW:=DW*1.2
                            end
                        until MD=1;
                if (S<>X1) or (Z<>Y1) then HiPlot5(S,Z,C);
                SP:=S; ZP:=Z
            end;
            XK:=S; YK:=Z
        end;
    Procedure HIFLESH5;

```

```

const R=6; B=45;
var DX,DY,X2,Y2,X3,Y3:integer;
    A:real;
begin
  A:=HiArg5(X0,Y0,X1,Y1);
  DX:=round(R*sin(A)*Hj);
  DY:=round(R*cos(A));
  X2:=X1+DX; Y2:=Y1+DY;
  X3:=X1-DX; Y3:=Y1-DY;
  HiDraw5(X0,Y0,X1,Y1,C);
  HiArc5(X2,Y2,X1,Y1,B,C);
  HiArc5(X3,Y3,X1,Y1,-B,C)
end;
end.

```

## Додаток 4

## Програмний модуль Polynom.

```

{$F+,O+}
Unit Polynom;
Interface
  uses Sunvar;
  type KOR=array[1..2,1..30] of real;
  procedure ZAMPPL(L:real; A:COEF; var B:COEF);
    { заміна p на (p-1) у поліномі
      A(p)=A[n]*p^n+...+A[1]+A[0],
      Результат-поліном B(p)=B[n]*p^n+...+B[1]+B[0]
      A,B-масиви коефіцієнтів поліномів A(p),B(p).
      type COEF=array [-1..30] of real; }
  procedure UMNPOL(A,B:COEF; var C:COEF);
  procedure UMNPOLC(AR,AI,BR,BI:COEF; var CR,CI:COEF);
  function HORREAL(P:real; A:COEF):real;
  procedure HORCOMP(A:COEF; R,I:real; var RE,IM:real);
  procedure KORPOLMS(EPSP,EPSF:real; A:COEF; var KORN1:KOR);
    { обчислення коренів полінома
      A(P)=A[N]*P^N+...+A[1]*P+A[0]
      із занесенням їх в масив K за схемою
      PM=KORN1[1,M]+j*KORN1[2,M],
      type COEF=array[0..30] of real;
      KOR=array[1..2,1..30] of real;}
  procedure KVADRAT(M:integer; A:COEF; var KORN1:KOR);
    { визначає корні полінома A(P)=A[N]*P^N+...+A[1]*P+A[0],
      якщо N<=2, та розміщує їх в масив KORN1 за схемою
      PK=KORN1[1,K]+j*KORN1[2,K], де PK-K-ий корінь

```

```

    Полінома  $A(p)$ ,  $j$ - уявна одиниця.}
function RADIUS(A:COEF):real;
procedure DELPOL(A,B:COEF; var C,D:COEF);
    { ділення полінома  $A(p)=A[nA]*p^{nA}+\dots+A[1]*p+A[0]$ 
      на поліном  $B(p)=B[nB]*p^{nB}+\dots+B[1]*p+B[0]$ ,
      результат - поліном  $C(p)=C[nC]*p^{nC}+\dots+C[1]*p+C[0]$ 
      та поліном  $D(p)=D[nD]*p^{nD}+\dots+D[1]*p+D[0]$  - залишок
      type COEF=array[0..30] of real; }
function HURVIC(A:COEF):integer;
    { оцінка стійкості системи із характеристичним рівнянням
       $A[n]*p^n+\dots+A[1]*p+A[0]$  за допомогою критерія Гурвіца.
      HURVIC=1 система стійка, HURVIC=-1 система не стійка
      type COEF=array[0..30] of real; }
procedure ALSUMPOL(A,B:COEF; OP:char; var C:COEF);
    { Сума поліномів
       $A(p)=A[nA]*p^{nA}+\dots+A[1]*p+A[0]$  та
       $B(p)=B[nB]*p^{nB}+\dots+B[1]*p+B[0]$ ,
      результат поліном
       $C(p)=C[nC]*p^{nC}+\dots+C[1]*p+C[0]=A(p)+(-)B(p)$ .
      OP - різниця, OP + сума поліномів  $A(p), B(p)$ 
      type COEF=array[0..30] of real; }
function STEPUST(EPS:real; A:COEF):real;
    { визначення степеню стійкості системи із
      характеристичним рівнянням  $A[n]*p^n+\dots+A[1]*p+A[0]$ ,
      EPS- точність визначення стійкості
      за допомогою критерія Гурвіца.
      HURVIC=1 система стійка, HURVIC=-1 система не стійка
      type COEF=array[0..30] of real; }

```

## Implementation

```

procedure ZAMPPL;
var S,Z,F,N:integer;
    C:real;
begin
    F:=1; N:=round(A[-1]);
    for S:=0 to N do
        begin
            C:=A[N-S];
            for Z:=N-S-1 downto 0 do
                C:=-C*L+A[Z];
            B[S]:=C/F;
            for Z:=1 to N-S do
                A[Z-1]:=A[Z]*Z;
            F:=F*(S+1)
        end
    end;
end;

```

```

procedure UMNPOL;
var S,Z,NA,NB,NC:integer;
begin
  NA:=round(A[-1]); NB:=round(B[-1]);
  NC:=NA+NB; C[-1]:=NC;
  for Z:=0 to NC do C[Z]:=0;
    for Z:=0 to NA do
      for S:=0 to NB do
        C[Z+S]:=C[Z+S]+A[Z]*B[S];
      RedPol(C,0,C)
    end;
end;
procedure UMNPOLC;
var S,Z,NA,NB,NC:integer;
begin
  NA:=round(AR[-1]); NB:=round(BR[-1]);
  NC:=NA+NB; CR[-1]:=NC;
  for Z:=0 to NC do
    begin
      CR[Z]:=0; CI[Z]:=0
    end;
  for Z:=0 to NA do
    for S:=0 to NB do
      begin
        CR[Z+S]:=CR[Z+S]+AR[Z]*BR[S]-AI[Z]*BI[S];
        CI[Z+S]:=CI[Z+S]+AR[Z]*BI[S]+AI[Z]*BR[S]
      end
    end;
end;
function HORREAL(P:real; A:COEF):real;
var Z,N:integer;
    R:real;
begin
  N:=round(A[-1]); R:=A[N];
  for Z:=N-1 downto 0 do
    R:=R*P+A[Z];
  HORREAL:=R
end;
procedure HORCOMP;
var Z,N:integer;
    RE1:real;
begin
  N:=round(A[-1]); RE:=A[N];
  IM:=0;
  for Z:=N-1 downto 0 do
    begin
      RE1:=RE*R-IM*I+A[Z];
      IM:=RE*I+IM*R;
      RE:=RE1
    end;
end;

```

```

    end
end;
procedure KORPOLMS;
var M,NB,NC,ND,N0,N:integer;
    I,RE,IM,MODUL,R0,I0,MOD0,H,IV,INI,RAD:real;
    A0,B,C,D:COEF;
begin
    RedPol(A,0,A);
    N:=round(A[-1]); M:=1; A0:=A; N0:=N;
    if N0>2
    then
        begin
            while N0>2 do
                begin
                    RAD:=RADIUS(A0); R0:=-STEPUST(EPSP,A0);
                    IV:=sqrt(sqr(RAD)-sqr(R0));
                    INI:=0; H:=IV/10; MOD0:=1E25; I0:=0;
                    while 2*H >EPSP do
                        begin
                            I:=INI;
                            while I<=IV do
                                begin
                                    HORCOMP(A0,R0,I,RE,IM);
                                    MODUL:=sqrt(sqr(RE)+sqr(IM));
                                    if MODUL<MOD0
                                    then
                                        begin
                                            I0:=I; MOD0:=MODUL
                                        end;
                                        I:=I+H
                                    end;
                                    IV:=I0+H; INI:=I0-H; H:=H/2
                                end;
                            if ABS(I0)<=EPSP
                            then
                                begin
                                    NB:=1; B[0]:=-R0; B[1]:=1;
                                    KORNI[1,M]:=R0; KORNI[2,M]:=0;
                                    M:=M+1
                                end
                            else
                                begin
                                    NB:=2; B[0]:=sqr(R0)+sqr(I0);
                                    B[1]:=-2*R0; B[2]:=1;
                                    KORNI[1,M]:=R0;
                                end
                            end;
                    KORNI[2,M]:=abs(I0);
                    KORNI[1,M+1]:=R0;
                end
            end;
        end;
end;

```

```

                                KORNI [2, M+1] := -abs (I0) ; M:=M+2
                                end;
                                DELPOL (A0, B, C, D) ;
                                A0:=C; N0:=NC
                                end
                                end;
                                KVADRAT (M, A0, KORNI)
                                end;
procedure KVADRAT;
var D, Z, R, I: real;
    N: integer;
begin
    RedPol (A, 0, A) ; N:=round (A[-1]) ;
    case N of
        1: begin
            KORNI [1, M] := -A[0] / A[1] ; KORNI [2, M] := 0
            end;
        2: begin
            D:=sqr (A[1]) - 4*A[0]*A[2] ; Z:=2*A[2] ;
            if D>=0
            then
                begin
                    KORNI [1, M] := (-A[1] + sqrt (D)) / Z ;
                    KORNI [2, M] := 0 ;
                    KORNI [1, M+1] := (-A[1] - sqrt (D)) / Z ;
                    KORNI [2, M+1] := 0
                end
            else
                begin
                    R:=-A[1] / Z ; I:=sqrt (-D) / abs (Z) ;
                    KORNI [1, M] := R ; KORNI [2, M] := i ;
                    KORNI [1, M+1] := R ; KORNI [2, M+1] := -I
                end
            end
        end
    end
end;
end;
function RADIUS;
var Z, N: integer;
    AMAX: real;
begin
    RedPol (A, 0, A) ; N:=round (A[-1]) ; AMAX:=abs (A[0]) ;
    for Z:=0 to N-1 do
        if abs (A[Z]) > AMAX
            then AMAX:=abs (A[Z]) ;
    RADIUS:=1+AMAX/abs (A[N])
    end;
procedure DELPOL;

```

```

var Z,S,NA,NB,NC,ND:integer;
    S1:real;
begin
  RedPol(A,0,A); RedPol(B,0,B);
  NA:=round(A[-1]); NB:=round(B[-1]);
  if NA<NB
    then
      begin
        D:=A; ND:=NA; NC:=0; C[0]:=0
      end
    else
      begin
        ND:=NB-1; NC:=NA-NB;
        for Z:=0 to NA do C[Z]:=0;
        for Z:=NA-NB downto 0 do
          begin
            S1:=0;
            for S:=0 to ND do
              S1:=S1+B[S]*C[NB+Z-S];
              C[Z]:=(A[NB+Z]-S1)/B[NB]
            end;
          for Z:=ND downto 0 do
            begin
              S1:=0;
              for S:=0 to Z do
                S1:=S1+B[S]*C[Z-S];
                D[Z]:=A[Z]-S1
              end
            end;
          C[-1]:=NC; D[-1]:=ND
        end;
      end;
function HURVIC;
var Z,S,HURV,N:integer;
    R:real;
begin
  RedPol(A,0,A);
  HURV:=1; N:=round(A[-1]);
  if N>0
    then
      while(abs(A[N])<=1E-9) and (N>0) do N:=N-1;
  if N>0
    then
      begin
        if A[N]<0 then for Z:=0 to N do A[Z]:=-A[Z];
        for Z:=0 to N-1 do
          if A[Z]<=0 then HURV:=-1;
          if (HURV=1) and (N>2)

```

```

        then
            for Z:=1 to N-2 do
                begin
                    if A[N-Z]<=0
                        then HURV:=-1
                    else
                        begin
                            R:=A[N-Z+1]/A[N-Z]; S:=N-Z;
                            while S>=2 do
                                begin
                                    A[S-1]:=A[S-1]-A[S-
2]*R;
                                    S:=S-2
                                end
                            end;
                        end;
                    if A[1]<=0 then HURV:=-1
                end;
            HURVIC:=HURV
        end;
procedure ALSUMPOL;
var Z,NA,NB,NC:integer;
begin
    NA:=round(A[-1]); NB:=round(B[-1]);
    if NB<=NA then NC:=NA
        else NC:=NB;
    for Z:=0 to NC do
        begin
            C[Z]:=0;
            if Z<=NA then C[Z]:=C[Z]+A[Z];
            if Z<=NB then
                if OP='+' then C[Z]:=C[Z]+B[Z]
                    else C[Z]:=C[Z]-B[Z]
            end;
        C[-1]:=NC; RedPol(C,0,C)
    end;
function STEPUST;
var PMIN,PMAX,P:real;
    B:COEF;
    N:integer;
begin
    RedPol(A,0,A);
    N:=round(A[-1]); PMAX:=RADIUS(A); PMIN:=-PMAX; P:=0;
    while PMAX-PMIN>2*EPS do
        begin
            ZAMPPL(-P,A,B);
            if HURVIC(B)=1

```

```

        then PMAX:=P
        else PMIN:=P;
    P:=(PMAX+PMIN)/2
end;
STEPUST:=-P
end;
end.

```

## Додаток 5

## Програмний модуль Servis.

```

{$F+,O+}
Unit Servis;
Interface
uses Crt,Graph,Hi5,SunVar;
const VV=' Натисніть <<Enter>> '
      STV='Введіть ';
type STT=string[75];
var NR,NZ,XU1,YU1,NM:integer;
    J:char;
    NAME:STT;
    MCS:array[1..25] of string[50];
    MC:array[1..25] of string[4];
procedure Izv;
    { Виводить текст вибачення }
procedure Clear(X1,Y1,X2,Y2:integer);
    { Очищує прямокутну область екрана, де
      X1,Y1,X2,Y2-координати області}
procedure Ou(X:STT);
    { ,Виводить текст X у першому рядку екрана }
procedure Our(T:STT; var P:real);
    { організує введення значення змінної P;
      Т-пояснювальний текст }
procedure Oui(T:STT; var P:integer);
    { організує введення значення змінної P;
      Т-пояснювальний текст }
procedure PutA;
    { очищує область екрана (0,0,590,7) }
procedure Invit;
    { Інформація про готовність до роботи з
      елементами меню }
procedure Key; { Технічна зупинка }
procedure InGraph;
    { Ініціює графічний режим }

```

```

function YN:boolean;
  { Відповідь на запитання типу (y/n),
    YN=true - відповідь ствердна-(y),
    false-негативна (n) }
procedure ReadName(var Name:Nf);
Implementation
procedure IZV;
begin
  OutTextXY(80,0,'Перепрошуємо, іде розрахунок')
end;
procedure Clear(X1,Y1,X2,Y2:integer);
var U:boolean;
begin
  U:=(X1>=0) and (X2<GetMaxX) and (Y1>=0) and
(Y2<=GetMaxY);
  if U then
    begin
      SetViewPort(X1,Y1,X2,Y2,true); ClearViewPort;
      SetViewPort(0,0,GetMaxX, GetMaxY,true)
    end
  end;
procedure OU(X:STT);
begin
  OutTextXY(0,0,X)
end;
procedure Our(T:STT; var P:real);
var I:integer;
begin
  PutA; OutTextXY(112,0,STV+T);
  {$I-}
  repeat
    GotoXY(1,1); read(P); I:=IOResult;
    if I<>0 then Clear(0,0,111,8)
  until I=0;
  {$I+}
  PutA
end;
procedure Oui(T:STT; var P:integer);
var I:integer;
begin
  PutA; OutTextXY(112,0,STV+T);
  {$I-}
  repeat
    GotoXY(1,1); read(P); I:=IOResult;
    if I<>0 then Clear(0,0,111,8)
  until I=0;
  {$I+}

```

```
    PutA
  end;
procedure PutA;
begin
  Clear(0,0,590,8)
end;
procedure Invt;
begin
  OutTextXY(500,0,'Ваш хід')
end;
procedure Key;
begin
  OutTextXY(450,0,VV);
  J:=ReadKey; PutA
end;
procedure InGraph;
begin
  Gd:=Detect; Path:=' ';
  if Gd<>CGA then
    begin
      Gd:=CGA; Gm:=CGAHI; Path:='D:\TP\BGI\'
    end;
  InitGraph(Gd,Gm,Path);
  if GraphResult<>0 then Halt(1)
end;
function YN:boolean;
var J:char;
begin
  repeat
    J:=UpCase(ReadKey)
  until J in ['Y','N'];
  if J='Y' then YN:=true
    else YN:=false
end;
procedure ReadName(var Name:Nf);
begin
  repeat
    PutA; OutTextXY(120,0,'Введіть імя файла');
    GotoXY(1,1); readln(Name)
  until (Name<>#13) and (length(Name)<>0)
end;
end.
```

## Додаток 6

## Програмний модуль Sunvar.

```

Unit SunVar;
Interface
  uses Crt;
  const NmRel=40;{ NmL=600; NmR=200;}
  type NF=string[30];
        COEF=array[-1..30] of real;
        CoefRel=array[-1..NmRel] of real;
        CoefReli=array[-1..NmRel] of integer;
        M2Rel=array[0..NmRel,0..NmRel] of real;
        M2Reli=array[0..NmRel,0..NmRel] of integer;
        CoefR=array[-1..201] of real;
        CoefRi=array[-1..201] of integer;
        CoefL=array[-2..600] of real;
        CoefLi=array[-2..600] of integer;
  var
Gd, Gm, X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3, L, H, L0, H0, X0, Y0, XU, YU, NSOH, NSOV,
  NDOH, NDOV, SmV, SmH, S, Z:integer;
  Path:string[30];
  SizeF, SPos, BC:word;
  pF:pointer;
  Fil:file of byte;
  ST:string[3];
  NameF:NF;
  U:char;
  Xmin, Xmax, Ymin, Ymax, DX, DY, XnS, XkS, DxS, YnS, YkS, DyS, V0,
  YSc, XSc, DxO, DyO:real;
  A0, A1, A2, A3:COEFR;
  procedure RedPol(A:COEF; EPS:real; var B:COEF);
  procedure Spline(y:coefr);
  function Splint(x:real):real;

Implementation
  procedure RedPol(A:COEF; EPS:real; var B:COEF);
  var NB:integer;
  begin
    B:=A; NB:=round(B[-1]);
    while (NB>0) and (abs(B[NB])<=EPS) do
      begin dec(NB); B[-1]:=NB end
    end;
  procedure Spline(y:coefr);
  var m, s:integer;
      k, u :coefr;
      r, z:real;

```

```
begin
  m:=round(y[-1]); k[0]:=0; u[0]:=0; A0[-1]:=m;
  for s:=1 to m-1 do
    begin
      r:=3*(y[s+1]-2*y[s]+y[s-1]);
      z:=4-u[s-1]; k[s]:=(r-k[s-1])/z; u[s]:=1/z
    end;
  a2[m+1]:=0;
  for s:=m downto 1 do
    begin
      a2[s]:=k[s-1]-u[s-1]*a2[s+1];
      a0[s]:=y[s-1];
      a1[s]:=y[s]-y[s-1]-(2*a2[s]+a2[s+1])/3;
      a3[s]:=(a2[s+1]-a2[s])/3
    end
  end;
function Splint(x:real):real;
  var m,s:integer;
  z:real;
  begin
    m:=round(A0[-1]); s:=trunc(x)+1; z:=x+1-s;
    if s>m then begin s:=m; z:=1 end;
    if s<1 then begin s:=1; z:=0 end;
    splint:=(a3[s]*z+a2[s])*z+a1[s])*z+a0[s]
  end;
end.
```

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аверіна Т.В., Кубрак Н.А. Динаміка елементів систем: Навч.посібник. - К.:ІЗМН, 1998.-224с.
2. Автоматизация настройки систем управления /В.Я. Ротач, В.Ф.Кузицин, А.С.Клюев и др.; Под ред. В.Я. Ротача. -М.: Энергоатомиздат, 1984. -272с.
3. Автоматизированные системы управления процессами нагрева и отжига металла / К.И. Богаенко, Г.Г. Грабовский, А.А. Грищенко, С.А. Грищенко.- К.:Техніка,1997.-124с.
4. Ажогин В.В., Згуровский М.З. Автоматизированное проектирование математического обеспечения АСУ ТП. -К.: Вища шк., 1986. -335с.
5. Ажогин В.В., Згуровский М.З. Машинное проектирование оптимальных систем управления пространственно-распределенными динамическими объектами. -К.: Вища шк., 1985. -170с.
6. Ажогин В.В., Згуровский М.З., Корбич Ю.С. Методы фильтрации и управления стохастическими процессами с распределенными параметрами. -К.: Вища шк., 1988. -448с.
7. Белова Д.А., Кузин Р.Е. Применение ЭВМ для анализа и синтеза автоматических систем управления. -М.: Энергия, 1979. -264с.
8. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. -М.: Наука, 1979. -224с.
9. Власов-Власюк О.Б. Экспериментальные методы в автоматике. -М.: Машиностроение, 1969. -412с.
10. Гаврилов Г.К. Приближенные методы анализа переходных процессов. -М.: Сов. радио, 1966. -152с.
11. Голінко І.М., Остапенко Ю.О. Алгоритмічне визначення температурних параметрів випалювання кераміки в тунельній печі // Наукові вісті НТУУ КПІ: 1999. -№2. -С.145-149.
12. Голінко І.М., Остапенко Ю.О. Моделювання динамічного режиму підзони випалювання // Автоматизація виробничих процесів: 1999. -№2. -С.36-43.
13. Голінко І.М., Остапенко Ю.О. Система керування температурним режимом підзони випалювання тунельної печі // Наукові вісті НТУУ КПІ: -1999. №3 -С.21-25.
14. Голінко І.М., Остапенко Ю.О. Супервізорна система управління з компенсатором локального регулятора // Автоматизація виробничих процесів: -1998. №2. -С.73-77.
15. Грищенко А.З., Хиленко В.В. Метод понижения порядка и исследование динамических систем: Учебн. пособие. -К.: УМК ВО, 1988. -164с.
16. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. -М.: Машиностроение, 1974. -327с.
17. Девятков Б.Н. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления.- Новосибирск: СО АН СССР, 1964. -323с.
18. Дейч А.М. Методы идентификации динамических объектов. -М.: Энергия, 1979. - 240с.
19. Загарий Г.И., Шубладзе А.М. Синтез систем управления на основе критерия максимальной степени устойчивости. -М.: Энергоатомиздат, 1988.

20. Згуровский М.З., Бидюк П.И., Анализ и управление большими космическими системами. –К.: Наук. думка, 1997. –449с.
21. Згуровский М.З., Мельник В.С. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. –К.: Наук. думка, 1999. –630с.
22. Карачун В.В., Кваско М.З., Кубрак Н.А. Прикладний аналіз і візуалізація характеристик динамічних систем: Навч. посібник. -К.: ІЗМН, 1999. -138с.
23. Карачун В.В., Кубрак Н.А. Дослідження частотних характеристик консервативних систем. // Автоматизація виробничих процесів: 1999. -№1(8), -С.35-40.
24. Кваско М.З., Кубрак Н.А. Динамічні моделі типових теплообмінних апаратів: Навч. посібник. -К.: ІЗМН, 1999. -136с.
25. Киричков В.Н. Идентификация объектов систем управления технологическими процессами. -К.: Вища шк., 1990. -263с.
26. Клюев А.С., Лебедев А.Г., Новиков С.И. Настройка систем автоматического регулирования барабанных паровых котлов. -М.: Энергоатомиздат, 1985. -280с.
27. Корнилов Ю.Г. Теоретические основы автоматического регулирования. -К.: Техника, 1966. -397с.
28. Краснопрошина А.А., Репникова Н.Б., Ильченко А.А. Современный анализ систем управления с применением MatLab, Simulink, Control System: Учебн. пособие. -Л.: Корнейчук, 1999. -144с.
29. Кубрак А.И. Идентифікація динамічних характеристик елементів систем керування. Част. 1. Математичні методи: Навч. посібник. -К.: ІСДО, 1995. -208с.
30. Кубрак А.И., Ярощук Л.Д. Програмування та розрахунок автоматичних систем. -К.: Вища шк., 1992. -366с.
31. Кубрак Н.А. Хвильові процеси в гнучких ланках автоматичних систем.: Навч. посібник. –К.: НМЦ ВО, 2000. –160с.
32. Ладиев Р.Я., Остапенко Ю.А., Кубрак А.И., Кваско М.З. Математическое описание объектов с распределенными параметрами: Учебн. пособие. -К.: КПИ, 1974. -149с.
33. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы (Элементы теории, методы расчета и справочный материал): Учебн. пособие для вузов. -М.: Машиностроение, 1977. -464с.
34. Марков С.И., Минаев В.М., Артамонов Б.Н. Идентификация параметров колебательных систем автоматического регулирования. -Л.: Энергия, 1975. -92с.
35. Настройка автоматических систем и устройств управления технологическими процессами: Справ. пособие. Под ред. А.С. Клюева. -М.: Энергия, 1977. -399с.
36. Олійник О.Я., Піддубний В.І., Салтанов М.В. Дослідження поведінки гнучких ниток у потоках на основі дискретної моделі. ДАН УРСР. –1979. -№9.
37. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Построение моделей процесса производства. -М.: Энергия, 1975. -375с.
38. Ротач В.Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования. -М.: Энергия, 1973. -440с.
39. Савицкий С.К. Инженерные методы идентификации энергетических объектов. -Л.: Энергия, 1978. -71с.
40. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. -М.: Наука, 1980.-240с.

41. Современная теория систем управления Под ред. К.Т. Леондеса. -М.: Наука, 1970. -511с.
42. Теория автоматического управления. Ч.1: Учебник. Под ред. А.В. Нетушила. - М.: Высш. шк., 1967. -424с.
43. Фаронов В.В. Программирование на персональных ЭВМ в среде Турбо Паскаль.- М.: Изд-во МВТУ, 1992.-448с.
44. Шестихин О.Ф., Энгель Р.В. Машинные методы проектирования систем автоматического управления. -Л.: Машиностроение, 1973. -256с.
45. Широкий Д.К., Куриленко О.Д. Оптимальні настройки промислових систем регулювання. -К.: Вища шк., 1975. -264с.
46. Юсупов Р.М. Получение информации об управляемом процессе в самонастраивающихся системах. -М.-Л.: Энергия, 1966. -142с.

## ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ВИБІР СТРУКТУРИ МОДЕЛІ ОБ’ЄКТА	5
1.1. Залежність структури апроксимуючої передаточної функції від частоти	5
1.2. Залежність структури апроксимуючої передаточної функції об’єкта від коефіцієнта передачі розімкненої системи	15
1.3. Залежність похибки у визначенні динамічних характеристик від структури моделі	20
1.4. Особливості апроксимації динамічних характеристик трубчастих теплообмінників	28
1.5. Залежність апроксимуючої структури від “оточення” досліджуваного динамічного елемента	31
2. АПРОКСИМАЦІЯ ЗА РЕАКЦІЮ НА ВІДОМИЙ ВХІДНИЙ СИГНАЛ	42
2.1. Апроксимація однією з елементарних динамічних ланок за перехідною характеристикою	42
2.1.1. Безінерційна ланка	42
2.1.2. Інтегральна ланка	42
2.1.3. Ідеальна диференціальна ланка	43
2.1.4. Реальна диференціальна ланка	43
2.1.5. Інтегро-диференціальна ланка	44
2.1.6. Аперіодична ланка 1-го порядку	45
2.1.7. Аперіодична ланка 2-го порядку	46
2.1.8. Коливальна ланка	49
2.1.9. Консервативна ланка	51
2.1.10. Ланка транспортного запізнювання	52
2.2. Апроксимація методом площ	52
2.2.1. Ідея методу та елементарні приклади	52
2.2.2. Геометричний смисл коефіцієнтів $C_s$	56
2.2.3. Визначення коефіцієнтів $C_s$ для елементарних об’єктів з розподіленими параметрами	62
2.2.4. Визначення коефіцієнтів $C_s$ з передаточної функції об’єкта з розподіленими параметрами	68
2.2.5. Визначення $C_s$ шляхом подання трансцендентної передаточної функції у вигляді відношення узагальнених поліномів	70
2.2.6. Визначення коефіцієнтів $C_s$ шляхом розвинення дробово-раціональної передаточної функції в степеневий ряд	72
2.2.7. Визначення коефіцієнтів дробово-раціональної апроксимуючої передаточної функції за масивом коефіцієнтів $C_s$ .	73
3. АПРОКСИМАЦІЯ ЗА ЧАСТОТНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ	76
3.1. Апроксимація однією з елементарних динамічних ланок за амплітудно-фазовою характеристикою	76
3.1.1. Реальна диференціальна ланка	76
3.1.2. Інтегро-диференціальна ланка	77

3.1.3. Аперіодична ланка першого порядку	79
3.1.4. Аперіодична ланка другого порядку та коливальна ланка	79
3.1.5. Консервативна ланка	80
3.1.6. Ланка транспортного запізнювання	81
3.2. Розрахунок частотних характеристик за дробово-раціональною передаточною функцією	82
3.3. Розрахунок частотних характеристик за системою $n$ диференціальних рівнянь першого порядку	83
3.4. Розрахунок частотних характеристик за імпульсною характеристикою	85
3.5. Розрахунок резонансних частот коливальних об'єктів	89
3.6. Розрахунок частотних характеристик консервативних систем.	93
3.7. Апроксимація дробово-раціональною передаточною функцією за рядом точок амплітудно-фазової характеристики	98
4. НЕТРАДИЦІЙНІ МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ	102
4.1. Комп'ютерне визначення передаточних функцій за системою $n$ диференціальних рівнянь першого порядку	102
4.2. Визначення передаточної функції об'єкта за його реакцією на довільний вхідний сигнал	106
4.3. Апроксимація шляхом розкладання передаточних функцій в ряди за від'ємними степенями $p$	107
4.4. Розкладання дробово-раціональної передаточної функції в ряд за від'ємними степенями $p$	112
4.5. Система заміщення для дробово-раціональної передаточної функції	113
4.6. Комп'ютерне визначення коефіцієнтів передаточної функції дискретної моделі теплоакумуючої стінки	117
4.7. Комп'ютерне визначення передаточних функцій дискретної моделі струнного підвісу приладів	127
4.8. Визначення передаточної функції за реакцією на відомий вхідний сигнал методом найменших квадратів	134
4.9. Ідентифікація динамічного об'єкта за рядом точок амплітудно-фазової характеристики методом найменших квадратів	140
ДОДАТКИ	149
Додаток 1. Програма DeadTime	150
Додаток 2. Програмний модуль Gromu	154
Додаток 3. Програмний модуль Hi5	162
Додаток 4. Програмний модуль Polynom	166
Додаток 5. Програмний модуль Servis	173
Додаток 6. Програмний модуль Sunvar	176
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	178

**Жученко Анатолій Іванович**  
**Кваско Михайло Зіновійович**  
**Кубрак Наталія Анатоліївна**

**Ідентифікація динамічних  
характеристик  
Комп'ютерні методи**

Редактор М.П. Прокопенко

Підп. до друку 20.12.1999р

Формат 60x84  $\frac{1}{16}$

Папір друк №1. Спосіб друку офсетний.

Умовн. друк.арк. 4.65

Умовн. фарбо-відб. 10.11      Обл.-вид.арк. 7.27

Тираж 400. Зам.№ 94318

---

252056, Київ - 56, просп.Перемоги 37, ФХМ, каф.АХВ

---

Фірма «ВПОЛ»  
03151, Київ, вул.Волинська,60